ORTAOKULLARLA, LİSELER, ÖĞRETMEN OKULLARI, TİCARET LİSELERİ, KIZ VE ERKEK SAN'AT ENSTİTÜLERİ VE İMAM - HATİP OKULLARININ BÜTÜN ÖĞRENCİLERİ İÇİN

ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLERİYLE

KARE KÖK VE KÜP KÖK ALMA TEKNİĞİ

Kâmil İşcan
Akşehir İlköğretmen Okulu
Matematik Öğretmeni

Mahiye Mengül
2012

Teknik Kitap ve Mecmua Basımevi — İZMİR
1957

ÖNSÖZ

Bu kitap,

Ortaokullar, liseler, öğretmen okulları ve bu derecedeki meslekî ve teknik öğretim okullariyle, imam - hatip okulları öğrencilerinin, aritmetik ve cebir, geometri, trigonometri, fizik ve mekanik derslerinde «Kare Kök ve Küp Kök alma»da karşılaşacakları güçlükleri hemen giderebilmek ve «Kare Kök ve Küp Kök alma»nın tekniğini temelinden öğrenmek istiyenlerin bu isteklerini yerine getirmek maksadiyle hazırlandı.

Bu kitap, orta dereceli okullarımızın bütün öğrencilerine ve bu mevzuda birşeyler öğrenmek istiyenlere biraz faydalı olabilirse vazifesini yapmış olacak ve yazarını bahtiyar edecektir.

Eksiksiz ve kusursuz olduğu yolunda bir iddiası bulunmıyan kitabımın, kıymetli meslekdaş ve okurlarımın ikaz, irşat, teşvik ve tenkidleriyle, ileride daha iyi bir şekil alacağını ümit ederim.

AKŞEHİR, 1 - Ağustos - 1957 *KÂMİL İŞCAN*

BİRİNCİ BÖLÜM

REFİ

1. Üslü Kemiyetin Tarifi :

«n» tam ve pozitif olmak üzere, n sayıda a'nın çarpımına, a kemiyetinin n ' inci kuvveti denir. Bu kuvvet a^n sembolüyle gösterilir. (a üzeri n) veya çokcası (a üssü n) diye okunur.

$$\underbrace{a.\ a.\ a.....a}_{n\ defa} = a^n$$

Genel olarak, a^n sembolüyle gösterilen kemiyetlere «ÜSLÜ KEMİYETLER» denir.

2. Refi :

«a^n» sembolüyle gösterilen bir üslü kemiyette a kemiyetine «merfu» veya «taban», eşit çarpanların sayısını gösteren «n» sayısına «üs» ve a ' nın n ' inci kuvvetini bulmak için yapılan işleme de «REFİ» denir. Bu tarife göre :

$a^1 = a$

$a^2 = a \cdot a$

$a^3 = a \cdot a \cdot a$

.....

.....

.....

$$a^n = \underbrace{a.\ a.\ a.\ a.\ a.\ a.\ a.\ a.\ a.}_{n\ Tane}$$

a^2, a'nın ikinci kuvvetini gösterir. a üssü 2 (veya a üzeri 2 veya a'nın ikinci kuvveti) diye okunur.

a^3, a'nın üçüncü kuvvetini gösterir a üssü 3 (veya a üzeri 3 veya a'nın üçüncü kuvveti) diye okunur.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

a^n, a'nın n' inci kuvvetini gösterir. a üssü n (veya a üzeri n veya a'nın n'inci kuvveti) diye okunur.

NOT: Özel olarak ;

Bir sayının ikinci kuvvetine bu sayının «KARESİ»,üçüncü kuvvetine «KÜPÜ» adı verilir. Yukarıdaki tariften açıkca anlaşılacağı gibi üssü olmıyan her sayının üssü 1 demektir. a = a^1 demektir.

3. Refetmek :

Bir sayıyı bir kuvvete refetmek demek, bu sayıyı üssün gösterdiği sayı kadar çarpan halinde yazıp çarpmak demektir. Kısaca;

Bir sayıyı bir veya bir kaç defa kendisiyle çarpmaya «REFETMEK» denir.

Kendi kendisiyle çarpılan sayıya «merfu» veya «taban» ; kaç defa çarpılacağını gösteren sayıya «üs» veya «kuvvet» ve

— Neticede meydana gelen sayıya da tabanın ikinci kuvveti (veya karesi), üçüncü kuvveti (veya küpü), 4. üncü kuvveti, 5. inci kuvveti, ... denir.

Meselâ : 5 sayısını ikinci kuvvete refetmek demek bu sayıyı iki defa kendisiyle çarpmak demektir. Şu halde : $5^2=5\times5=25$ olur.

Burada çarpan olan 5 ler merfu veya taban, 5 in üssüne yazılan küçük 2 sayısı ise üs, meydana gelen 25 sayısı ise 5'in ikinci kuvvete refi veya 5'in karesi olur. Genel olarak :

Bir sayıyı n gibi bir kuvvete refetmek demek, bu sayıyı üssün gösterdiği kadar çarpan halinde yazıp çarpmak demektir. a^n üslü kemiyetinde «a» ya merfu veya taban ve «n» ye üs veya kuvvet denir. Yukarıda da belirtildiği üzere bir sayının ikinci kuvvetine bu sayının «KARESİ» ve bu sayının üçüncü kuvvetine o sayının «KÜPÜ» denir.

4. Kare :

Bir sayının yan yana iki defa yazılarak çarpılmasından elde edilecek sonuca o sayının « KARESİ » denir. Bir başka deyimle bir sayının ikinci kuvvetine «KARESİ» denir.

Meselâ : $5\times5=5^2=25$

$8\times8=8^2=64$ eder. Burada 5 ' in karesi 25, 8'in karesi 64 tür.

Bu anlayışla, bir ondalık kesrin ve bir bayağı kesrin kareleri de bu kesirleri yan yana iki defa yazarak çarpmakla hesaplanabilir.

Meselâ: $0,5\times0,5 = (0,5)^2 = 0,25$

$0,01\times0,01=(0,01)^2=0,0001$

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

$\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$

5. Bir Tam Sayının Tam Kare Olup Olmadığının Pratik Yoldan Araştırılması :

TAM KARE : Bir sayının kare kökü tam çıkarsa bu sayıya «TAM KARE» denir. Tam kare sayılar, sayılar dizisinde pek az bulunur. Bir tam sayının, tam kare olup olmadığını pratik olarak hesaplayabilmek için bu sayıyı asal çarpanlara ayırmalıdır.

Eğer asal çarpanların üsleri 2 veya 2 nin katı olursa verilen sayının tam kare olduğu, asal çarpanların üsleri 2 veya 2 nin katı olmazsa verilen sayının tam kare olmadığı söylenir.

Meselâ : $2025 = 5^2\times9^2$

2025 sayısı tam kare bir sayıdır. Keza: $1764=2^2\times3^2\times7^2$ olduğundan 1764 sayısı tam kare bir sayıdır. $1\,956 = 2^2\times3\times163$ olduğundan tam kare değildir.

NOT : Asal sayılar hiç bir zaman tam kare olamazlar. (Bir bariç)

6. Küp :

Bir sayının yan yana üç defa yazılarak çarpılmasından elde edilecek sonuca o sayının «KÜPÜ» denir. Bir başka deyimle, bir sayının üçüncü kuvvetine o sayının «KÜPÜ» denir.

Meselâ : 5 sayısının karesi $5^2 = 5\times5 = 25$

5 sayısının küpü $5^3 = 5\times5\times5 = 125$

8 sayısının karesi $8^2 = 8\times8 = 64$

8 sayısının küpü $8^3 = 8\times8\times8 = 512$ eder.

Burada 5 in küpü 125, 8 in küpü 512 dir Bu anlayışla, bir ondalık kesrin veya bir bayağı kesrin küpleri de bu kesirleri yan yana üç defa yazarak çarpmakla hesaplanabilir.

Meselâ : $0,5\times0,5\times0,5 = (0,5)^3 = 0,125$

$0,01\times0,01\times0,01 = (0,01)^3 = 0,000001$

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

$\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5} = (\frac{2}{5})^3 = \frac{8}{125}$

Şu halde; iki eşit çarpan çarpımına kare ve üç eşit çarpan çarpımına küp denilmesi birincinin bir kare alanını ve ikincinin bir küb hacmini ifade etmelerinden dolayıdır.

7. Bir Tam Sayının Tam Küp Olup Olmadığının Pratik Yoldan Araştırılması :

TAM KÜP : Bir sayının küp kökü tam çıkarsa bu sayıya «TAM KÜP» denir. Tam küp sayılar, sayılar dizisinde pek az bulunur. Bir tam sayının, tam küp olup olmadığını pratik olarak hesaplayabilmek için, bu sayıyı asal çarpanlara ayırmalıdır.

Eğer asal çarpanların üsleri 3 veya 3 ün katı olursa verilen sayının tam küp olduğu, asal çarpanların üsleri 3 veya 3 ün katı olmazsa verilen sayının tam küp olmadığı söylenir.

Meselâ : $2\,744 = 2^3 \times 7^3$ olduğundan bu sayı tam küp bir sayıdır.

$74\,088 = 2^3 \times 3^3 \times 7^3$ olduğundan bu sayı da tam küp bir sayıdır.

$1\,956 = 2^2 \times 3 \times 163$ olduğundan tam küp değildir.

NOT : Asal sayılar hiç bir zaman tam kare olamadıkları gibi, hiç bir zaman da tam küp olamazlar. (Bir hariç)

İKİNCİ BÖLÜM

KÖK

1. Kökün Manası ve Kök Alma İşlemi :

Bir refetme işleminde ref sonucu ile üs belli iken merfuyu bulma işlemine «KÖK ALMA» işlemi denir.

$5^2 = 25$ ifadesinde 25 sayısı 5 in karesi olduğu gibi, 5 sayısına da 25 sayısının kare kökü denir.

Misal 1: $x^2 = 36$ eşitliğinde (veya denkleminde) ref sonucu 36 ve üs 2 dir. Merfu olan x'i bulmak için yapılan işlem (kare kök alma) işlemidir.

Misal 2: $x^3 = 64$ eşitliğinde (veya denkleminde) ref sonucu 64 ve üs 3 tür. Merfu olan x'i bulmak için yapılan işlem (küp kök) işlemi dir.

Kök işleminde kullanılan şu ($\sqrt{}$) işarete kök işareti denir ki kökü alınan sayı bu işaretin altına ve kökün derecesi ise bu işaretin üstüne yazılır. Ancak; bir sayının ikinci kuvvetten kökü alındığı zaman işaretin üstüne hiç bir şey konmaz. 216 sayısının üçüncü kuvvetten kökü;

$\sqrt[3]{216} = 6$ şeklinde gösterilir. Burada 3 kökün derecesi, 216 kökü alınan, kök diye gösterilen 6 da küp köktür.

2. Kare kök :

Tarif : Bir sayı eşit iki çarpana ayrılacak olursa bu çarpanlardan her birine verilen sayının «KARE KÖKÜ» denir.

Meselâ: $49 = 7 \times 7$ olduğundan 7 çarpanına 49 sayısının kare kökü denir. Keza, $81 = 9 \times 9$ olduğundan 9 çarpanı 81 in kare kökü olmuş olur.

Bir başka deyimle kare kök :

Bir sayının kare kökü, öyle bir ikinci sayıdır ki, bu sayının (ikincinin) karesi alınınca birinci sayı elde edilir.

Misal: 25 sayısının kare kökü 5 tir. Çünki $5\times5=5^2=25$ eder. Bunun gibi, 64 sayısının kare kökü 8 dir. Çünki $8\times8=64$ eder.

Genel olarak: $a^2=b$ ise, a'ya b'nin kare kökü denir.

3. Tam Kare Sayıların Kare kökünün Pratik Yoldan Hesaplanması :

Her hangi bir tam sayının tam kare olduğu biliniyorsa, bu sayının kare kökünü pratik olarak hesaplayabilmek için, sayı asal çarpanlara ayrıldıktan sonra, içinde bulunan asal çarpanların üslerini ikiye bölmelidir.

Misal: $2^2\times3^2\times5^2=900$ olduğundan, $\sqrt{900}=2\times3\times5=30$ olur. Çünki $30\times30=900$ olur. Keza;

$2^6\times3^4\times5^2 = 64\times81\times25 = 129\,600$ olduğundan,

$\sqrt{129600}=2^3\times3^2\times5=360$ olur. Çünki, $360\times360=129600$ dür.

4. Küp Kök :

Tarif : Bir sayı eşit üç çarpana ayrılacak olursa bu çarpanlardan her birine verilen sayının «KÜP KÖKÜ» denir.

Meselâ : $125=5\times5\times5$ olduğundandan 5 çarpanına 125 sayısının küp kökü denir. Keza, $512=8\times8\times8$ olduğundan 8 çarpanı 512 nin küp kökü olmuş olur. Bir başka deyimle küp kök:

Bir sayının küp kökü, öyle bir ikinci sayıdır ki, bu sayının (ikincinin) küpü alınınca birinci sayı elde edilir. Misal: 64 sayısının küp kökü 4 tür. Çünki : $4\times4\times4=4^3=64$ eder. Bunun gibi, 216 sayısının küp kökü 6 dır. Çünki : $6\times6\times6=6^3=216$ eder.

Genel olarak: $a^3=b$ ise, a'ya b nin küp kökü denir.

5. Tam Küp Sayıların Küp köklerinin Pratik Yoldan Hesaplanması :

Her hangi bir tam sayının tam küp olduğu biliniyorsa, bu sayının küp kökünü pratik olarak hesaplıyabilmek için, sayı asal çarpanlara ayrıldıktan sonra içinde bulunan asal çarpanların üslerini üçe bölmelidir.

Misal 1 : $3375=3^3\times5^3$ olduğundan bu sayı tam küp bir sayıdır ve $3\times5=15$ in küpüdür.

Misal 2 : $287\,496=2^3\times3^3\times11^3$ olduğundan bu sayı tam küp bir sayıdır ve $2\times3\times11=66$ nın küpüdür.

Misal 3 : $27\,000\,000 = 2^3\times3^3\times5^3$ olduğundan bu sayı tam küp bir sayıdır ve $2^2\times3\times5^2=300$ ün küpüdür.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM
KARE KÖK ALMA TEKNİĞİ

§1— Kare Kök Almanın Tekniğiyle İlgili Hazırlayıcı İlk Bilgiler :

1. A) 1 den 10 a kadar (10 hariç), BİR rakamlı (ilk 9 sayının) sayıların,

B) 10 dan 100 e kadar (100 hariç), onar onar, İKİ rakamlı sayıların,

C) 100 den 1000 e kadar (1000 hariç), yüzer yüzer ÜÇ rakamlı sayıların, karelerini hesaplıyarak aşağıya yazalım :

A)	$1^2=1$	$6^2=36$
	$2^2=4$	$7^2=49$
	$3^2=9$	$8^2=64$
	$4^2=16$	$9^2=81$
	$5^2=25$	
B)	$10^2=100$	$60^2=3600$
	$20^2=400$	$70^2=4900$
	$30^2=900$	$80^2=6400$
	$40^2=1600$	$90^2=8100$
	$50^2=2500$	
C)	$100^2=10\,000$	$600^2=360\,000$
	$200^2=40\,000$	$700^2=490\,000$
	$300^2=90\,000$	$800^2=640\,000$
	$400^2=160\,000$	$900^2=810\,000$
	$500^2=250\,000$	

Bunlar iyice incelenirse :

I — BİR RAKAMLI ilk 9 sayıdan herhangi birinin karesinin ya 1 rakamlı yahutta 2 rakamlı bir sayı,

II — 10 ile 100 arasındaki (100 hariç) İKİ RAKAMLI 90 sayıdan her hangi birinin karesinin, $10^2 = 100$ ile $100^2 = 10\,000$ arasında (10 000 hariç) bulunacağı cihetle ya 3 yahutta 4 rakamlı bir sayı,

III — 100 ile 1000 arasındaki (1000 hariç) ÜÇ RAKAMLI 900 sayıdan herhangi birinin karesinin, $100^2=10000$ ile $1000^2=1000000$ arasında (milyon hariç) bulunacağı cihetle ya 5 yahutta 6 rakamlı bir sayı,

IV — Ayni düşünce tarziyle DÖRT RAKAMLI bir sayının karesinin ya 7 yahutta 8 rakamlı bir sayı; BEŞ RAKAMLI bir sayının karesinin ya 9 yahutta 10 rakamlı bir sayı; . . . . . n rakamlı bir sayının karesinin ya, 2n—1 yahutta 2n rakamlı bir sayı olduğu anlaşılır.

2.) Yukarıdakilerin tersi olarak ;

I — 1 rakamlı ve 2 rakamlı bir sayının kare kökünün 1 rakamlı,
II — 3 rakamlı ve 4 rakamlı bir sayının kare kökünün 2 rakamlı,
III — 5 rakamlı ve 6 rakamlı bir sayının kare kökünün 3 rakamlı,

. . . . . .

2n—1 rakamlı ve 2n rakamlı bir sayının kare kökünün n rakamlı, bir sayı olması icabeder.

3.) Buraya kadar olan incelemelerimizi şu iki kaide içinde özetliyelim :

Kadie: I— Herhangi bir sayının karesinin rakamları sayısı, ya karesi alınan sayının rakamları sayısının 2 katı kadar veya 2 katından bir eksiği kadar olur. Meselâ, 4274 sayısı 4 basamaklı olduğuna göre karesi 8 veya 7 basamaklıdır. Burada: $4274^2=18\ 267\ 076$ olup 8 basamaklıdır.

Kaide: II— Birincinin tersine olarak her hangi bir sayının kare kökünün rakamları sayısı, verilen sayının rakamları sayısının yarısı veya bir fazlasının yarısı kadar rakamlıdır. (Verilen sayının rakamları sayısı çiftse, kare kök bunun yarısı kadar rakamlı; tekse verilen sayının rakamları sayısının bir fazlasının yarısı kadardır.) Meselâ 4 rakamlı 3803 ün kare kökü 2 rakamlı, 5 rakamlı 14 274 ün kare kökü ise rakamları sayısının bir fazlası olan 6 nın yarısı kadar yani 3 rakamlı olacaktır.

4.) İşte bu sebepten dolayıdır ki kare kökü alınacak sayının rakamları birler basamağından başlanarak (sağdan sola doğru) ikişer ikişer gruplara ayrılır. Bu gruplardan her birine kare kökte bir rakam tekabül eder. En başta olan gurup 1 rakamlı veya 2 rakamlı olabilir. Buna göre kare kök olarak elde edilecek sayının rakamları sayısı ayrılan grupların sayısı kadar olmalıdır.

§ 2. Kare kök Almanın Nazariyatı

A.) Kare kök almanın dayandığı temel özdeşlikler:

B.) Kare kök almanın temel özdeşliklere dayanarak nümerik misaller üzerinde izahı:

A.) Kare kök almanın dayandığı temel özdeşlikler :

Kare kök alma kaidesi cebirin şu özdeşliklerinden istifade edilerek çıkartılmıştır :

1— $[a+b]^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a+b)\ .\ b$

2— $[a+b+c]^2 = [\,(a+b) + c\,]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$
$= a^2 + (2a+b)b + [2(a+b) + c]\ .\ c$

3— $[a+b+c+d]^2 = [(a+b+c)+d]^2 = (a+b+c)^2 + 2(a+b+c).d + d^2$
$= a^2 + (2a+b)b + [2(a+b)+c]\,.\,c + [2(a+b+c)+d]d$

Bu özdeşliklerde harfler yerine nümerik misaller alalım.

$$26^2 = (20+6)^2 = 20^2 + 2\ .\ 20\ .\ 6 + 6^2 = 20^2 + (40+6)\ .\ 6$$
$$= 400 + 240 + 36 \qquad = 400 + 276$$
$$= 676 \qquad = 676.$$

$$358^2 = (300+50+8)^2 = (300+50)^2 + 2\ .\ (300+50)8 + 8^2$$
$$= \qquad = 122500 + 5600 + 64 = 128164$$

$$1435^2 = (1000+400+30+5)^2 = (1000+400+30)^2 + 2(1000+400+30)5 + 5^2$$
$$= 2044900 + 14300 + 25$$
$$= 2059225$$

B.) Kare kök almanın temel özdeşliklere dayanarak nümerik misaller üzerinde izahı :

Şimdi de yukarıdaki özdeşliklerden istifade suretiyle kare kökün nasıl alındığını misaller üzerinde gösterelim.

Misâl: 1

$$\sqrt{a^2+2ab+b^2} = \sqrt{676} = \sqrt{600+76} = \overset{a}{\widehat{20}} + \overset{b}{\widehat{6}}$$

$\mp a^2$	400	$2a$ b
$\pm 2ab + b^2$	276	: $\widehat{40} \cong \widehat{6}$
$\pm 2ab$	240	
$+b^2$	36	
$\pm b^2$	36	
0	0	

NOT : b Bölümü hiç bir zaman 9 dan büyük olamaz.

İşlemin kısaltılması için atılan ilk adım :

$$\sqrt{a^2+(2a+b)b} = \sqrt{676} = \sqrt{600+76} = \overset{a}{\overbrace{20}} + \overset{b}{\overbrace{6}}$$

$$\begin{array}{lr} \angle \mp a^2 & 400 \\ \hline +(2a+b)b & 276 \\ \angle \mp(2a+b)b & 276 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \quad : \underbrace{40}_{2a} \cong \underbrace{6}_{b}$$

İşlemin kısaltılmasında ikinci ve son adım :

$$\begin{array}{r|l} & 2\ 6 \\ \hline \sqrt{6\,76} & 2\times 2=4 \\ \angle\ 4 & 46 \\ \hline 276 & \times\ 6 \\ \angle\ 276 & 276 \\ \hline 0 & \end{array}$$

1 — Sıfırlar yazılmaz ve sayı toplam şeklinde gösterilmez. Verilen bu sayı birler basamağından itibaren (Sağdan sola doğru) ikişer ikişer guruplara ayrılır.

2 — 6 nın kare kökü (Tam sayı olarak) 2 dir. $2^2 = 4$ sayısı 6 dan çıkartılır. Önüne diğer iki rakam (ikinci gurup) indirilir. Hakikatte 676 dan $20^2 = 400$ çıkartılıyor demektir.

3 — Aranan kare kök; $(20+x)$ gibi bir sayıdır bunun karesi,

$676 = (20+x)^2 = 20^2+2\,.\,20\,.\,x+x^2$ dir. 676 dan 400 çıkartılarak geriye kalan sayı :

$$676 - 400 = 2\,.\,20\,.\,x + x^2$$

$276 = 2\,.\,20\,.\,x + x^2$ dir. x paratezine alınarak

$$276 = (2\,.\,20 + x)\,x$$

$276 = (40 + x)\,x$ dir.

Yani öyle bir x sayısı bulunacaktırki, bu sayı 40 a eklendikten sonra gene x ile çarpılırsa 276 elde edilsin. Kare kökün birler basamağındaki bu x rakamını kolayca bulabilmek için bölerken aşağıya indirilen 2 rakamlı sayının (Bu misâlde 76) son rakamı (Bu misâlde 6) nazarı dikkate alınmıyarak işlem yapılır. Şu halde sayı - Yaklaşık olarak - 276 yı 40 bölerek buluna bilir. $(276 : 40 \cong 6)$

276 da 40 (veya 27 de 4) 6 defa vardır. 6 sayısı 40 a eklenir. (4 ün önüne yazılır) ve 6 ile çarpılırsa 276 bulunur. Kare kök 26 dır. (Eğer çarpım 276 dan büyük çıksaydı, 6 yerine 5 verilir ve ayni şekilde devam olunurdu.)

Misâl : 2

$$\sqrt{a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2} = \sqrt{128164} = \sqrt{\overline{128}\,\overline{164}} = \overset{a}{\overbrace{300}} + \overset{b}{\overbrace{50}} + \overset{c}{\overbrace{8}}$$

$$\begin{array}{lr} \angle \mp a^2 & -90000 \\ \hline +2ab & 38164 \\ \angle \mp 2ab & -30000 \\ \hline +b^2 & 8164 \\ \angle \mp b^2 & -2500 \\ \hline +2(a+b)c & 5664 \\ \angle \mp 2(a+b)c & -5600 \\ \hline +c^2 & 64 \\ \angle \mp c^2 & -64 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2a \\ : \overbrace{600} \cong 5 \\ \\ \\ 2\,(a+b) \\ : \overbrace{700} \cong 8 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

İşlemin kısaltılmasında ilk adım :

$$\sqrt{a^2+(2a+b)b+[2(a+b)+c]c} = \sqrt{\overline{128}\,\overline{164}} = \overset{a}{\overbrace{300}} + \overset{b}{\overbrace{50}} + \overset{c}{\overbrace{8}}$$

$$\begin{array}{lr} \angle \mp a^2 & -90000 \\ \hline +(2a+b)b & 38164 \\ \angle \mp(2a+b)b & -32500 \\ \hline [2(a+b)+c]c & 5664 \\ \angle \mp [2(a+b)+c]c & -5664 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2a \\ : \overbrace{600} \cong 50 \\ \\ 2(a+b) \\ : \overbrace{700} \cong 8 \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ 650\times 50=32500 \\ \\ \\ 708\times 8=5664 \end{array}$$

İşlemin kısaltılmasında ikinci ve son adım :

$$\begin{array}{r|l|l} & 3\ 5\ 8 & \\ \hline \sqrt{\overline{128}\,\overline{164}} & 3\times 2=6 & 708 \\ \angle\ -9 & & \times\ 8 \\ \hline 381 & 65 & 5664 \\ & \times\ 5 & \\ \angle\ -325 & 325 & \\ \hline 5664 & & \\ \angle\ -5664 & & \\ \hline 0 & & \end{array}$$

Misâl : 3

$$\sqrt{a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2} = \sqrt{2\,059\,225} = \overset{a}{1000}+\overset{b}{400}+\overset{c}{30}+\overset{d}{5}$$

$\mp a^2$	-1000000	$2a$	b
$+2ab$	1059225	$: 2000 \cong 400$	
$\mp 2ab$	-800000		
$+b^2$	259225		
$\mp b^2$	-160000	$2(a+b)$	c
$+2(a+b)c$	99225	$: 2800 \cong 3$	
$\pm 2(a+b)c$	-84000		
$+c^2$	15225		
$\mp c^2$	-900	$2(a+b+c)$	d
$+2(a+b+c)d$	14325	$: 2860 \cong 5$	
$\mp 2(a+b+c)d$	-14300		
$+d^2$	25		
$\mp d^2$	-25		
0	0		

İşlemin kısaltılmasında ilk adım :

$$\sqrt{a^2+(2a+b)b+[2(a+b)+c].c+[2(a+b+c)+d].d} = \sqrt{2059225} = \overset{a}{1000}+\overset{b}{400}+\overset{c}{30}+\overset{d}{5}$$

$\mp a^2$	-1000000	$2a$	b
$+(2a+b)b$	1059225	$: 2000 \cong 400$	
$\pm (2a+b)b$	-960000		
$+[2(a+b)+c].c$	99225		
$\pm [2(a+b)+c].c$	-84900		
$+[2(a+b+c)+d].d$	14325	$: 2860 \cong 5$	
$\pm [2(a+b+c)+d].d$	-14325		
0	0		

İşlemin kısaltılmasında ikinci ve son adım :

$\sqrt{2\,059\,225}$	$1\ 4\ 3\ 5$	
1	$1\times 1=1$	2865
105		$\times\ 5$
96	24	14325
992	$\times\ 4$	
849	96	
14325	283	
14325	$\times\ 3$	
0	849	

§ 3— Kare kök Almanın Pratik Olarak Nümerik Misâller Üzerinde İzahı.

KARE KÖK ALMAK İÇİN İLK HAZIRLIKLAR :

$\sqrt{A}$ 1 — Kare kökü alınacak sayı kök işareti içine yazılır. (Bu kısım şekilde A harfiyle gösterilmiştir.)

$\sqrt{A}$ 2 — Kök işaretinin yatay kenarı (üst kenarı) sağa doğru uzatılır.

$\sqrt{A}$ 3 — Kare kökü alınacak sayının sağından geçen ve kök işaretinin uzatılan yatay kenarını kesen düşey bir doğru çizilir.

B

$\sqrt{A}$ 4 — Kök işaretinin uzatılan yatay kenarının sağ üst kısmına «KARE KÖK» yazılır. (Bu kısım şekilde B harfiyle gösterilmiştir.)

B

$\sqrt{A}$ C 5 — Kök işaretinin uzatılan yatay kenarının sağ alt kısmına da (düşey doğrunun sağına) kare kök alırken yapılan işlemler yazılır. (Bu kısım şekilde C harfiyle gösterilmiştir.)

KARE KÖK NASIL ALINIR ?

1.) Kare kökü alınacak sayı, tam kare ve 1 ile 100 arasında ise çarpım tablosuyla (kerrat cetveliyle) kare kök hemen bulunabilir. Meselâ : 64 sayısının kare kökü 8 dir. Çünkü, $8^2=64$ dür.

2.) Şimdi kare kökü 2 rakamlı (iki basamaklı) bir sayının kare kökünü nasıl alacağımızı inceliyelim :

İki rakamlı (2 basamaklı) bir sayı (y x) biçiminde olsun . x birler basamağı, y'de onlar basamağındaki sayı olduğundan bu sayıyı cebirsel olarak (10 y + x) biçiminde yazabiliriz. Şu halde kare kökü (10 y + x) olan sayı, $(10\ y + x)^2$ dir. Bunu açalım :

$$(10\ y + x)^2 = 100\ y^2 + 2.10.y.x + x^2$$

$$\ldots\ldots = 100\ y^2 + (20\ y + x)\ x$$

bu esası gözönünde tutarak; 4225 sayısının kare kökünü arıyalım.

$(10\ y+x)^2 = 100\ y^2 + (20\ y + x)\ x = 4225$ iki tarafın kare kökünü alalım.

$$\sqrt{\begin{array}{l} 100\ y^2+\ (20\ y+\ x)x\ = \\ \mp 100\ y^2 \\ \hline (20y+x)x:\ 20\ y \cong x \\ \mp\ (20y+x)x \\ \hline 0 \end{array}} \qquad \begin{array}{l} 10\ y = 60,\ x=5,\ 10y+x=65 \\ \sqrt{\begin{array}{l} 3600\ +\ 625 \\ 3600 \\ \hline 625\ :\ 120 \cong 5 \\ (120+5).5 \\ \hline 0 \end{array}} \end{array}$$

Yukarıdaki tabloda görüldüğü üzere 4225 sayısının kare kökünü almak için evvelâ, 4225 sayısını 3600+625 olarak iki parçaya ayıralım. Çünki 60 ın karesi 3600, 70 in karesi 4900 olup, 4900 verilen sayıdan büyüktür. O halde aranan kare kökün onlar rakamı 6 dır. Şu halde $100\ y^2=3600$ iki taraftan çıkarılarak bir tarafta; $(20y+x).x$, diğer tarafta 625 kalır. $(20\ y\ +\ x)\ x$, 20 y'ye bölünürse yaklaşık olarak x elde edilirki bu da 5 tır. ($625 : 20\ y$ veya $625 : 120 \cong 5$) iki taraftan :

$(20\ y\ +\ x\ )\ x\ =\ (\ 120\ +\ 5\ )\ 5\ =\ 625$ çıkartılırsa her iki tarafta da, sıfır kalacağından aranan kare kök 65 tır.

Kare kökü 3 veya daha çok basamaklı olan sayıların kare köklerinin bulunması, aynen bu esasa göre yapılabileceği apaçıktır. Buna göre her hangi bir sayının kare kökünü almak için esası yukarıdaki açıklamadan başka bir şey olmıyan aşağıdaki pratik kaideyi verelim:

Bir Tam Sayının Kare kökünü Almak

Yapılacak işlemleri şöylece sıralıyabiliriz :

1°.) Kare kökü alınacak sayı, sağdan başlanarak ikişer rakamlı gruplara ayrılır, son grup tek rakamlı da olabilir.

2°.) Sayının en soldaki grubunda bulunan sayının kare kökü alınır, eğer tam kare kökü yoksa küçük olan yakın sayı seçilir. Bu, sayının kare kökünün soldan ilk rakamıdır. (Kök iki rakamlı ise; onlar basamağıdır.) Bunun karesi sayının soldaki ilk grubundan çıkarılır.

3°.) Kalanın sağına, soldaki gurup indirilir, böylece hasıl olan sayının sağdan ilk rakamı bir virgül ile ayrılır; geri kalan sayı kare kökün bulunan soldan ilk rakamının (onlar basamağının) iki katına bölünür.

4°.) Elde edilen bölüm kare kökün soldan ikinci rakamı (birler basamağı) veya bundan bir büyük rakamdır.

Kare kökün bulunan ilk rakamının 2 katı alınarak daha evvel bulunan bölüm bunun (sağına) önüne konur. Böylece bulunan sayının bölüm olarak bulunan rakam ile çarpımı kalana eşit veya daha küçükse bu sayı, kökün soldan ikinci rakamı (birler basamağı) olarak bulunur. Bulunan bu çarpım kalandan büyükse, sıra ile bu rakamdan birer küçük olan rakamlar denenir.

Kare köke ait olan iki rakamın verdiği sayı için 3 ve 4 te söylenen işlemler kare kökün bütün rakamlarını buluncaya kadar devam edilir.

Eğer, kare kökü alınacak sayı tam kare değilse yine aynı yoldan gidilerek bu sayının bire yakın yaklaşık kare kökü bulunur. Daha yaklaşık kare kök bulunmak istenirse son kalanın önüne 2 sıfır konup bulunan bire yakın kare kökte bir virgül ile ayrılarak yukarıda anlatıldığı şekilde işleme devam edilir.

Kare kökün Pratik Olarak Bulunması

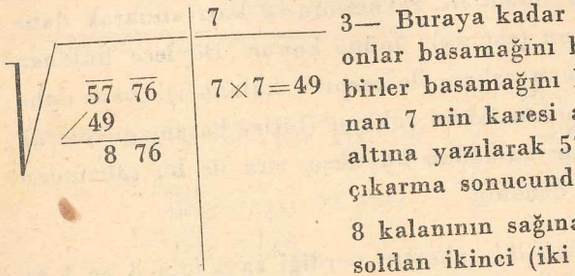
Misal : 1-) Üç veya dört basamaklı bir sayının kare kökünü hesaplamak : 5 776 sayısının kare kökünü hesaplamıya çalışalım.

$$\sqrt{\begin{array}{l} \overline{57}\ \overline{76} \\ A \end{array}}$$

1— Kare kökü alınacak sayının basamakları sağdan sola doğru ikişer ikişer guruplara ayrılır. (En soldaki gurup tek rakamlı da kalabilir.) Misalde 2 gurup meydana gelmiştir. Kare kökün iki basamaklı bir sayı olduğu söylenebilir.

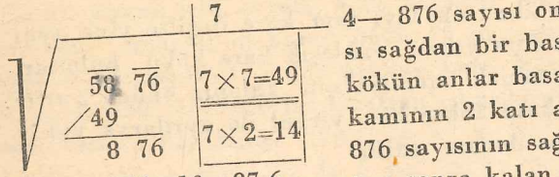
$$\begin{array}{l|l} & B \\ & 7 \\ \hline \sqrt{\begin{array}{l} \overline{57}\ \overline{76} \\ A \end{array}} & 7\times 7=49 \end{array}$$

2— Ayrılan guruplardan, en soldaki gurubun (iki veya bir basamaklı sayının) yaklaşık olarak kare kökü hesaplanır. Örnekte en soldaki gurup 57 dir. 57 nin kare kökü 8 olamaz. Çünki 8 in karesi 64 tür ve 57 nin içinde yoktur. 7 nin karesi olan 49, 57 nin içinde vardır. O halde 57 nin yaklaşık olarak kare kökü 7 dir. 7 yanda görüldüğü gibi (B harfinin yerine) yazılır. Bulunan 7 rakamı aranan kare kökün onlar basamağıdır.



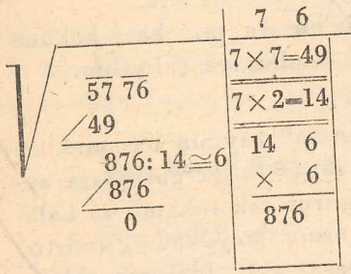
3— Buraya kadar olan işlemlerle kare kökün onlar basamağını bulduk. Şimdi kare kökün birler basamağını bulmağa çalışalım. Bulunan 7 nin karesi alınır. Bulunan 49, 57 nin altına yazılarak 57 den çıkartılır. Misalde çıkarma sonucunda 8 kalmıştır.

8 kalanının sağına kare kökü alınan sayının soldan ikinci (iki basamaklı) gurubu olan 76 indirilerek 876 sayısı bulunur.



4— 876 sayısı ona bölünür. (Veya 876 sayısı sağdan bir basamak ayrılır.) Aranan kare kökün anlar basamağı olarak bulunan 7 rakamının 2 katı alınır. Bulunan 14 sayısının, 876 sayısının sağından bir basamak ayrıldıktan sonra kalan 87 sayısı içinde kaç defa olduğu aranır. (87 : 14≅6)

Bulunan 6 rakamı kare kökün birler basamağı olabilir.



5 — Bulunan 6 rakamı, 14 ün sağına yazılarak elde edilen 146 sayısı 6 ile çarpılır. (Bu yapılan işlemler misalin C kısmında görülmektedir.) (Birler basamağı 7 olsaydı 147 sayısı 7 ile, 8 olsaydı 148 sayısı 8 ile, 9 olsaydı 149 sayısı 9 ile çarpılmalıdır.)

6 — 146 nın 6 ile çarpımından elde edilen 876 sayısı A gurubundaki 876 sayısından çıkartılırsa sıfır kaldığı görülür ki bu da aranan kare kökün birler basamağının 6 olduğunu gösterir. Bu 6 rakamını örnekte B deki 7 rakamının sağına koyarsak kare kökü 76 olarak bulmuş oluruz.

NOT : 1 - 146 nın 6 ile çarpımından elde edilecek çarpım, 876 dan küçük çıkarsa (biran için küçük çıktığını kabul edelim.) 876 dan çıkarılır. Fark, kare kök alma işleminin kalanıdır. Misalde kalan sıfırdır. Yani kalan yoktur 5776 sayısının kare kökü 76 dır,

2 — 146 nın 6 ile çarpımından elde edilecek çarpım 876 dan büyük çıkarsa (biran için büyük çıktığını kabul edelim) kare kökün birler basamağı 6 olamaz. 6 dan küçük rakamlardan biri olabilir.

3 — Farzedelim 5 olsa, 145 in 5 ile çarpımından elde edilecek çarpım. 876 dan çıkartılır. Yine fark kare kökün kalanıdır.

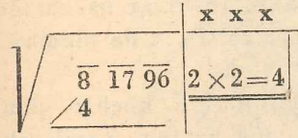
4 — 145 in 5 ile çarpımından elde edilecek çarpım yine 876 dan büyük çıkarsa kare kökün birler basamağı 5 olamaz 4 olabilir.

Ayni şekilde 4 rakamı da, 144, 4' ile çarpılmak suretiyle denenebilir.

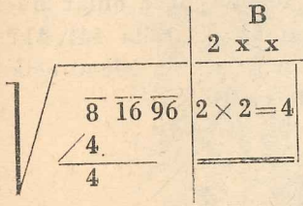
5 — Her sayının kare kökü tam değildir. Kare kökü tam olmıyan sayıların kare kökünü alırken, kare kökü her hangi bir basamağa kadar yürütmek gerekir.

Sayıların kare kökünü bir basamak yürütmek için kalan sayının sağına iki sıfır konarak kök almaya devam edilir. Bu şekilde kare kök onda birler, yüzde birler, binde birler, ... basamağına kadar hesaplanabilir.

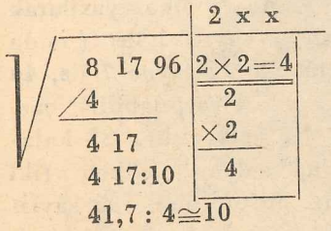
Misal: 2— Beş veya altı basamaklı bir sayının kare kökünü hesaplamak : 81796 sayısının kare kökünü hesaplamaya çalışalım.



1 —Verilen sayının basamakları sağdan sola doğru ikişer ikişer guruplara ayrılır. (Burada en soldaki gurup 8 dir ve tek rakamlıdır) Misalde 3 gurup meydana gelmiştir. Buradan kare kökün 3 basamaklı bir sayı olduğu söylenebilir.



2 — Ayrılan guruplardan en soldaki gurubun (burada 8'in) yaklaşık kare kökü hesaplanır. Örnekte en soldaki gurup 8 dir. 8 in kare kökü 3 olamaz. Çünki 3 ün karesi 9 dur 8 in içinde yoktur 2 nin karesi olan 4, 8'in içinde vardır. O halde 8 in yaklaşık olarak kare kökü 2 dir. 2 yanda görüldüğü gibi B harfinin yerine yazılır.



3— Buraya kadar olan işlemlerle kare kökün yüzler basamağını bulduk. Şimdi kare kökün onlar ve birler basamaklarını bulmaya çalışalım Önce onlar basamağını arıyalım. Bunun için bulunan 2 nin karesi alınır. 2 nin karesi olan 4, 8 in altına yazılır. ve 8 den çıkartılır. Örnekte çıkarma sonucu olan fark 4 tür. 4 kalanının sağına kare kökü alınan sayının soldan ikinci (iki basamaklı) gurubu olan 17 indirilerek 417 sayısı bulunur.

4— 417 sayısı 10 a bölünür (veya 417 sayısı sağdan bir basamak ayrılır.)

5 — Aranan kare kökün yüzler basamağı olarak bulunan 2 nin 2 katı alınır.

6 — Bulunan 4 sayısının 417 sayısının sağından bir basamak ayrıldıktan sonra kalan 41 sayısı içinde kaç defa olduğu aranır. (41,7 : 4≅10)

NOT : 1 — Burada bulunan 10 sayısı kare kökün onlar basamağı olamaz. 10 dan küçük olan 9 veya buda uygun gelmezse 8 veya buda uygun gelmezse bir küçüğü olan 7, . . . olabilir.

NOT : 2 — Başka işlemlerde bölme sonucunda 11, 12, 13, 14, ... de çıkabilir. Bu hallerde de yine kare kökün onlar basamağı 10 olmadığı gibi 11, 12, 13, ... de olamaz.

	2 x x
√ 8 17 96	2×2=4
/4	2
4 17	× 2
4 17 : 10	4
41,7 : 4=10	49
	× 9
	441

7 — 10 sayının bir küçüğü olan 9 rakamı 4 ün sağına yazılarak elde edilen 49 sayısı 9 ile çarpılır. Sonuç 417 den büyükse onlar basamaği 9 olamaz. (Burada 441, 417 den büyüktür.) Çarpma işlemi eğik bir doğru ile çizilir.

	2 8 x	
√ 8 17 96	2×2=4	4 8
/4	2	× 8
4 17	× 2	3 8 4
/3 84	4	
33 96	49	
	× 9	
	441	

8 — 9 rakamının bir küçüğü olan 8 rakamı 4 ün sağına yazılarak elde edilen 48 sayısı 8 ile (buda uygun gelmezse 47 sayısı 7 ile, 46 sayısı 6 ile . . . . çarpılabilir) çarpılır 417 den çıkartılır. 33 kalanının sağına soldan üçüncü (iki basamaklı) gurup olan 96 sayısı indirilerek 3396 sayısı bulunur.

Artık kare kökün onlar basamağının 8 olduğu söylenebilir.

	2 8 x	
√ 8 17 96	2×2=4	4 8
/4	2	× 8
4 17	× 2	384
/3 84	4	2 8
33 96	4 9	× 2
339,6 ≅6	× 9	56
56	441	566
		× 6
		3396

9 — Buraya kadar olan işlemlerle kare kökün yüzler ve onlar basamaklarını bulduk. Şimdi kare kökün birler basamağını arıyalım. Bunun için bulunan 28 in iki katı alınır. Bulunan 56 sayısının, 3396 sayısının ona bölümü içinde kaç defa olduğu aranır. Örnekte 6 defa olduğu görülür. Bulunan 6 rakamı 56 nın (28 in iki katının) sağına yazılarak elde edilen 566 sayısı 6 ile çarpılır.

(Birler basamağı 7 olsaydı 567 sayısı 7 ile 8 olsaydı 568 sayısı 8 ile, ...

Birler basamağı 5 olsaydı 565 sayısı 5 ile, 4 olsaydı 564 sayısı 4 ile . . . . çarpılmalıdır.

	2 8 6	
√ 8 17 96	2×2=4	4 8
/4	2	× 8
4 17	× 2	384
/3 84	4	28
33 96	4 9	× 2
/ 33 96	× 9	56
0	441	566
		× 6
		3396

10 — 566 nın 6 ile çarpımından elde edilen 3396 sayısı, A daki 3396 dan çıkartılırsa sıfır kaldığı görülürki buda aranılan kare kökün birler basamağının 6 olduğunu gösterir. Bu 6 rakamını örnekte B deki 28 sayısının sağına yazarsak kare kökü 286 olarak bulmuş oluruz.

Misal: 3— 416 875 sayısının kare kökünü virgülden sonra bir basamak ileriye kadar (onda bire yakın hata ile) hesaplıyalım.

	6 x x
√ 41 68 75	6×6=36
/36	
568	

1 — 1. ci ve ikinci misallerde olduğu gibi verilen sayının basamakları sağdan sola doğru ikişer ikişer guruplara ayrılır. (Burada 3 gurup meydana gelmiştir. Kare kökün 3 basamaklı bir sayı olduğu söylenebilir.) Ayrılan guruplardan en soldaki gurubun (2 ve-

ya 1 basamaklı sayının) yaklaşık olarak kare kökü hesaplanır. Örnekte en soldaki gurup 41 dir 41 in kare kökü 7 olamaz çünkü 7 nin karesi 49 dur. 41 in içinde yoktur. 6 nın karesi 36, 41 in içinde vardır. O halde 41 in yaklaşık olarak kare kökü 6 dır. 6 yanda görüldüğü gibi B harfinin yerine yazılır. Bulunan 6 sayısı aranan kare kökün yüzler basamağıdır.

	6 x x
$\sqrt{\overline{41}\ \overline{68}\ \overline{75}}$	6×6=36
36	
5 68	

5 68:10=56,8

2 — Buraya kadar olan işlemlerle kare kökün yüzler basamağını bulduk. Şimdi kare kökün onlar ve birler basamağını bulmağa çalışalım. 6 nın karesi alınır. 6 nın karesi olan 36, 41 în altına yazılarak 41 den çıkartılır. Örnekte çıkarma sonucunda fark 5 olarak kalmıştır. 5 kalanının sağına kare kökü alınan sayının soldan ikinci (2 basamaklı) gurubu olan 68 indirilerek 568 bulunur. 568 sayısı 10 a bölünür. veya 568 sayısı sağdan bir basamak ayrılır.

	6 x x
$\sqrt{\overline{41}\ \overline{68}\ \overline{75}}$	6×6=36
36	6
5 68	× 2
	12

560 : 10=56,8

56,8 : 12≅4

3 — Aranılan kare kökün yüzler basamağı olarak bulunan 6 rakamının 2 katı alınır. Elde edilen 12 sayısının, 568 sayısının sağından bir basamak ayrıldıktan sonra kalan 56 sayısı içinde kaç defa olduğu aranır. (56 : 12 ≅ 4) Bulunan 4 rakamı kare kökün onlar basamağı olabilir.

	6 4 x
$\sqrt{\overline{41}\ \overline{68}\ \overline{75}}$	6×6=36
36	6
5 68	× 2
4 96	12
72 75	12 4
	× 4
	49 6

4 — Bulunan 4 rakamı 12 nin sağına yazılarak elde edilen 124 sayısı 4 ile çarpılır (Bu işlemler misalin C kısmında görülmektedir.)

(Onlar basamağı 5 olsaydı 125 sayısı 5 ile, 6 olsaydı 126 sayısı 6 ile, ... çarpılmalıdır.)

5 — 124 ün 4 ile çarpımından elde edilen 496 sayısı, A gurubundaki 568 sayısından çıkartılır. Burada fark 72 dir. 72 nin sağına soldan üçüncü (iki basamaklı) gurup olan

75 indirilerek 7275 sayısı bulunur. Artık kare kökün onlar basamağının 4 olduğu söylenir.

	6 4 5	
$\sqrt{\overline{41}\ \overline{68}\ \overline{75}}$	6×6=36	64
36	6	× 2
5 68	× 2	128
4 96	12	1285
72 75	12 4	× 5
64 25	× 4	6425
8 50	49 6	

6 — Buraya kadar olan işlemlerle kare kökün yüzler ve onlar basamaklarını bulduk. Şimdi kare kökün birler basamağını arayalım. Bunun için bulunan 64 ün 2 katı alınır. Bulunan 128 sayısının 7275 sayısının 10 a bölümü içinde kaç defa olduğu aranır. Misalde 5 defa olduğu görülür.

(727,5 : 128 ≅ 5)

7 — Bulunan 5 rakamı 128 in (64 ün iki katının) sağına yazılarak elde edilen 1285 sayısı 5 le çarpılır. (Birler basamağı (6) olsaydı 1286 sayısı 6 ile, 7 olsaydı 1287 sayısı 7 ile . . . . . çarpılmalıdır ve 7275 ten çıkartılmalıdır.) bulunan 6425 sayısı 7275 sayısından çıkartılır. Fark 850 dir. Kare kökün tam sayı kısmı 645 tir ve 850 sayısı da Kare kök işleminin kalanıdır; yani 416 875 sayısının kare kökü tam değildir. (İşlemin son kısmına Misâl 4 ile devam edeceğiz.)

Misal : 4 Misal 3 te, 416 875 sayısının kare kökünün tam kısımının 645 ve kalanının 850 olduğunu bulmuştuk. Bu misal, bir önceki misalin ikinci kısmıdır. Şimdi kare kökün virgülden sonra birinci ondalık basamağını (yani kare kökü onda bire yakın hata ile) hesaplıyacağız.

Her sayının kare kökü tam değildir. Kare kökü tam olmayan sayıların, kare kökünü alırken, Kare kökü istenilen her hangi bir basamağa kadar yürütebiliriz. Sayıların kare kökünü bir basamak yürütmek için kalan sayının sağına 2 sıfır konarak kare kök almaya devam edilir.

Bu şekilde kare kökün ondalık kısmını, ondabire yakın hata ile,

yüzdebire yakın hata ile, bindebire yakın hata ile, ... hesaplamak mümkündür.

	645,6	
$\sqrt{\overline{41}\ \overline{68}\ \overline{75}}$	6×6=36	128 5
/36	6	× 5
5 68	× 2	642 5
/4 96	12	645
72 75	12 4	× 2
/64 25	× 4	1290
8 5000	49 6	1290 6
/7 7436	64	× 6
7564	× 2	77436
	128	

85 000 : 10=8500

8500 : 1290 ≅ 6

1 — 416 875 Sayısının kare kökünün tam kısmı 645 ve kalanı 850 dir. Virgülden sonra bir ondalık basamak hesaplayabilmek için yukarıda açıklanan metodla 850 sayısının sağına iki sıfır konur. 85 000 elde edilir.

2 — 85 000 ona bölünür. 85 00 içinde 645 sayısının 2 katının kaç defa olduğu aranır.

(8500 : 1290 ≅ 6)

3 — 1290 ın sağına 6 yazılır. Elde edilen 12 906 sayısı 6 ile (Eğer, bölüm 5 olsaydı 12 905 sayısı 5 ile, bölüm 4 olsaydı 12904 sayısı 4 ile . . . . .) çarpılır. Elde edilen 77 436 sayısı 85 000 den çıkartılır.

Kare kökün onda birler basamağı 6 dır. Kalan ise 75,64 tür.

§ 4— Ondalık Kesirlerin Kare kökünün Hesabı

Ondalık kesirlerin kare köklerini almaya başlamadan önce ;

1 — Tam sayı kısmının basamaklarını virgülden itibaren sağdan sola doğru,

2 — Ondalık kısmın basamaklarını virgülden itibaren soldan sağa doğru ikişer ikişer guruplara ayırmalıdır. Ondalık kısmın basamaklarını ikişer ikişer ayırırken en soldaki basamak tek kalırsa önüne bir sıfır koyarak çift yapılır. Bundan sonra tam sayıların kare köklerini almada olduğu gibi hareket edilir. Yalnız tam sayı kısmının sayıları bitince kare kök almaya bir virgül konarak devam edilir.

Misal : 145,2025 ondalık sayısının kare kökünü virgülden sonra ikinci ondalık basamağa kadar (yüzde bire yakın hata ile) hesaplayınız.

	1 x, x x
$\sqrt{\overline{1}\ \overline{45},\overline{20}\ \overline{25}}$	1×1=1

1 — Bu ondalık sayı kare kök işareti içine alındıktan sonra tam sayı kısmının basamaklarını sağdan sola doğru, ondalık kısmın basamaklarını virgülden itibaren soldan sağa doğru ikişer ikişer gruplara ayrılır. (Ondalık kısmın basamaklarını ikişer ikişer ayırırken en soldaki basamak tek kalırsa önüne bir sıfır koyarak çift yapılır.)

	1 x, x x
$\sqrt{\overline{1}\ \overline{45},\overline{20}\ \overline{25}}$	1×1=1
/1	
0 45	

2 — Tam sayı kısmının en soldaki gurubunun yaklaşık kare kökü hesaplanır. Örnekte en soldaki gurup 1 dir. Kare köküde 1 dir. 1 in karesi en soldaki guruptan çıkarılır. Burada fark sıfırdır. Bulunun 1 , kare kökün tam sayı kısmının onlar basamağıdır. Sıfırın yanına tam sayı kısmından 45 indirilir.

	1 x, x x
$\sqrt{\overline{1}\ \overline{45},\overline{20}\ \overline{25}}$	1×1=1
/1	1
0 45	× 2
/44	2
1	2 2
	× 2
	4 4

3 — Buraya kadar olan işlemlerle kare kökün tam sayı kısmının onlar basamağını bulduk. Şimdi, kare kökün birler basamağını bulalım. 1 in iki katı alınır. 45, 10'a bölünür. 4,5 ta ikinin kaç defa olduğu aranır. (4,5 : 2 ≅ 2) Bulunan 2, 1'in iki katı olan ikinin sağına yazılır. Ve yine iki ile çarpılır. 44 , 45 ten çıkartılır. Fark 1 dir

45 : 10=4,5

4,5 : 2≅2

	12,0	
$\sqrt{\overline{1}\ \overline{45},\overline{20}\ \overline{25}}$	1×1=1	12
/1	1	×2
0 45	× 2	24
/44	2	24 0
1 20	2 2	× 0
/0	× 2	0
1 20	4 4	

4 — Buraya kadar kare kökün, onlar ve birler basamaklarını bulmuş olduk, Verilen sayının kare kökünün tam kısmı 12 dir. Fark olan 1 in sağına verilen sayının ondalık basamaklarının ilk gurubu inilir. 1 20, 10'a bölünür. 12 nîn (kare kökün tam kısmı) 2 katı olan 24 ün 12 içinde kaç defa olduğu aranır.

(120 : 10=12, 12 : 24≅0)

12 içinde 24 olmadığından 0 olduğu kabul edilir. Kare kökün

tam kısmının 12 olduğunu bulmuştuk. 12 nin sağına bir virgül konduktan sonra bulunan sıfır onda birler basamağına yazılır.

	1 2 , 0 5	
$\sqrt{\overline{1}\ \overline{45},\ \overline{20}\ \overline{25}}$	$1 \times 1 = 1$	1 2
$\angle 1$		$\times$ 2
0 45	1	24
$\angle$ 44	$\times$ 2	
1 20	2	24 0
$\angle$ 0		$\times$ 0
1 20 25	2 2	0
$\angle$ 1 20 25	$\times$ 2	
0	44	240 5
		$\times$ 5
		12025

5 — Fark olan 120 nin sağına verilen sayının ondalık basamaklarının ikinci gurubu olan 25 yazılır. 12 025 (10'a) bölünür, . 1202,5 içinde 12 , 0 nin 2 katı olan 240 aranır. (1202,5 : 240=5) Bölüm sonucu olan 5, 240 ın sağına yazılır. Yine 5 ile çarpılır. 12 025 bulunur; bu sağdaki 12 025 ten çıkartılır. Farkın sıfır olduğu görülür. Kare kökün tam kısmı 12 idi, onda birler basamağı sıfır idi. Şimdi bulduğumuz 5 te kare kökün yüzde birler basamağı olmuş olur. Böylelikle, 1 45,20 25 sayısının kare kökünün 12,05 olduğu hesaplanmış olur.

NOT : 145,2025 ondalık kesrinin kare kökünü bu kesri bayağı kesir haline çevirdikten sonra da hesaplıyabiliriz. Şöyleki :

$$145{,}2025 = \frac{1\ 452\ 025}{10\ 000} \text{ olduğu düşünülürse,}$$

$$\sqrt{145{,}2025} = \frac{\sqrt{1\ 452\ 025}}{\sqrt{10\ 000}} = \frac{1205}{100} = 12{,}05 \text{ olur.}$$

Ondalık kesirlerin, bayağı kesre çevrildikten sonra kare kökleri yukarıda örnekte olduğu gibi hesaplanabilir. Bu örnekten özet olarak şu sonuç çıkar :

1— Ondalık bir sayıda virgülden sonra gelen rakam sayısı çiftse, virgül yokmuş gibı sayının kare kökü alınır. Ve bu sayıda sağdan itibaren, kare kökü alınan sayıda virgülden sonra gelen rakam sayısının yarısı kadar, virgül konur.

2— Ondalık bir sayıda virgülden sonra gelen rakam sayısı tekse, sayının önüne bir sıfır konur ve birinci esas tatbik edılir.

65,9344 sayısının kare kökünü alalım 659 344 sayısının kare kökü 812 dir. İlk sayıda virgülden sonra gelen rakam sayısı 4

olduğundan 812 sayısında sağdan itibaren ikinci basamaktan sonra virgül konur. O halde :

$$\sqrt{65{,}93\ 44} = 8{,}12 \text{ olur.}$$

§ 5 — Bayağı Kesirlerin Kare kökü :

Bir bayağı kesrin kare kökünü almak için, pay ve pay danın ayrı ayrı kare kökleri alındıktan sonra birbirine bölünür.

Meselâ : $\frac{16}{25}$ kesrinin kare kökü $\frac{4}{5}$

$\frac{1}{9}$ kesrinin kare kökü $\frac{1}{3}$ dür.

Özet olarak :

$\frac{2}{4\ 9}$ kesrinin kare kökü $\frac{1{,}414}{7} = 0{,}202$

Kesrin paydası tam kare olduğu takdirde (binde bire yakın hata ile) bu usul uygulanır.

Kesrin paydası tam kare olmadığı takdirde şu iki usulden biri uygulanır.

1 — Kesrin pay ve paydası; ya paydayla veyahut paydayı tam kare kılabilecek herhangi bir sayı ile çarpılmalı, genel kaideyi uygulamalıdır.

2 — Bayağı kesri, ondalık kesir haline koyarak (0 , 1) ; (0 , 01) ; (0,001), ... ve böylece istenilen yaklaşık derecesi elde edilecek surette, ondalık kesirlerin kare kök alma kaidesi uygulanmalıdır.

Meselâ : $\frac{3}{5}$ kesrinin kare kökünü bulmak gerekirse, bunun pay ve paydasını 5 ile çarpmalıdır. $\frac{3 \times 5}{5 \times 5} = \frac{15}{25}$ olurki bunun kare kökü alındıkta :

$$\sqrt{\frac{15}{25}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{3{,}873}{5} = 0{,}7746$$ (onbinde bire yakın hata ile) keza; $\frac{5}{1\ 2}$ kesrinin kare kökü bulunmak istenilse bu kesrin pay ve paydasını 3 ile çarparsak; $\frac{1\ 5}{36}$ olur. Bunun paydası tam kare olduğu için;

$$\sqrt{\frac{15}{36}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{15}}{6} = \frac{3{,}873}{6} = 0{,}6455$$ (onbinde bire yakın hata ile)

§ 6 — Kare kök İşleminin Sağlaması :

Kare kök alma işleminin doğruluğunu iki şekilde kontrol edebiliriz :

1 — Kare kökün karesi alınır. Buna işlemin kalanı eklenir. Bu toplamın sonucu kare kökü alınan sayı olmalıdır.

Misal : 416 875 sayısının kare kökü 645, kalanı 850 dir. Bu işlemin doğru olup olmadığını anlamak için 645 in karesi alınır. Buna 850 eklenir 416 875 elde edilirse kare kök alma işlemi doğrudur.

$645^2 + 850 = 416\ 025 + 850 = 416\ 875$ olduğundan kare kök alma işlemi doğrudur.

2 — Kare kök işleminin 9 ile sağlaması :

Bir sayı A, bunun kare kökü b, kalan x olsun.

$A = b^2 + x$ dir.

Bu eşitliğe göre A nın 9 ile bölünmesinden kalan, b^2 nin kalanı ile x in kalanı toplamına eşittir. Buradan şu kaide çıkartılır.

Kare kök olan b nin 9 ile bölümünden kalan hesaplanır, bunun karesi alınır. Bu karenin de 9 ile kalanı bulunur. Bu kalana x in 9 ile bölümünden kalan eklenir. Bu toplamın 9 ile bölümünden kalan verilen A sayısının 9 ile bölümünden kalana eşit olmalıdır.

$A = b^2 + x$

$416875 = 645^2 + 850$

$4 = 0 + 4$

§ 7 — Kare kök Alma Üzerine Alıştırma ve Problemler :

1.) Aşağıdaki sayılar tam kare sayılardır. Bu sayıların tam kare olduklarını;

a.) Asal çarpanlara ayırmak suretiyle,

b.) Kare köklerini almak suretiyle gösteriniz ve kare kök almanın sağlamasını yapınız.

576	(24)	974 169	(987)
2 401	(49)	1 012 036	(1006)
9 216	(96)	1 121 481	(1059)
11 664	(108)	1 572 516	(1254)
42 025	(205)	34 012 224	(5882)
128 164	(358)		

2.) Aşağıdaki sayıların kare kökleri tam sayı değildir. Kare köklerini ve kalanlarını hesaplayınız.

73	11 240
98	239 175
115	1 016 125
783	1 092 325
1 250	

3.) İkinci sorudaki sayıların kare köklerini virgülden sonra 3 basamak ileriye kadar (binde bire yakın hata ile) hesaplayınız.

4.) 1, 2, 3, 4, ... n rakamlı bir sayının karesi kaç rakamlı bir sayıdır?

5.) 1, 2, 3, 4, ... n .... 2n-1, 2n rakamlı bir sayının kare kökü kaç rakamlı bir sayıdır?

6.) Aşağıdaki sayıların kare köklerini virgülden sonra 4 basamak ileriye kadar (onbinde bire yakın hata ile) hesaplayınız.

2	130
5	1 958
7	15 255
29	360 003
70	

7.) Aşağıdaki ondalık sayıların kare köklerini hesaplayınız.

0,000 000 030 625	2,102 5	118,5921
0,000 001 512 9	8,4I0	384,16
0,000 094 867 6	13,69	3 504,64
0,102 4	79,210	12 056,04

8.) Aşağıdaki ondalık sayıların kare köklerini virgülden sonra 5 basamak ileriye kadar (yüzbinde bire yakın hata ile) hesaplayınız.

0,017	15,5650
8,56	0,000 4274
10,7	

9.) Aşağıdaki bayağı kesirlerin kare köklerini virgülden sonra 3

basamak ileriye kadar (binde bire yakın hata ile) hesaplayınız.

a.) $\frac{25}{64}$ $\frac{49}{81}$ $\frac{100}{169}$

b.) $\frac{3}{25}$ $\frac{5}{36}$ $\frac{7}{64}$

c.) $\frac{1}{6}$ $\frac{7}{10}$ $\frac{5}{12}$

10.) Bir karenin alanı 2097,64 m^2 dir. Bu karenin bir kenarı kaç metredir? (Cevap 45,8 m.)

11.) 90 metre uzunluğunda ve 40 metre genişliğinde bir bahçe aynı alanı muhafaza etmek üzere kare şekline sokulsa bunun bir kenarı kaç metre olur? (60 m.)

12.) Bir dik dörtgenin kenarları a=29 m. b=7,25 m. dir. Bu dik dörtgenin alanına eşit karenin bir kenarı kaç metredir? (Cevap 14,5 m.)

13.) Bir dik dörtgenin köşegeni 26m. ve kısa kenarı 10m. dir.

a — Bu dik dörtgenin uzun kenarı kaç metredir?

b — Bu dik dörtgenin alanına eşit karenin bir kenarı kaç metredir?

14.) Uzunluğu genişliğinin 3 katı kadar olan bir dik dörtgenin alanı, 8748 metrekare olduğuna göre boyutlarını bulunuz. (Cevap: 54 m. 162 m.)

15.) Bir dik dörtgenin alanı 2160 metrekare ve bir kenarı diğer kenarının $\frac{5}{12}$ sine eşit olduğuna göre bu dik dörtgenin kenarlarını bulunuz. (Cevap: 72 m. 30 m.)

16.) Uzunluğu 625 m. ve genişliği 400 m. olan bir dik dörtgenin kendi alanını değiştirmemek üzere kare şekline sokulması icabetse uzunluğunu ne kadar küçültmeli, genişliğine ne kadar eklemelidir?

17.) Bir dik üçgenin dik kenarlarından birisi b = 55 mm. öteki c=132 mm. dir.

a — Hipotenüsünün uzunluğunu,

b — Hipotenüse ait yüksekliğin uzunluğunu,

c — Hipotenüse ait kenar ortayın uzunluğunu,

d — Bu üçgenin alanına eşit karenin bir kenarının uzunluğunu hesaplayınız.

18.) Hipotenüsü 273 mm. ve bir dik kenarı 105 mm. olan dik üçgenin :

a — Diğer dik kenarın uzunluğunu (252 mm.)

b — Bu üçgenin alanına eşit karenin bir kenarının uzunluğunu bulunuz.

19.) Bir dik üçgenin alanı 120 cm^2. hipotenüsü 26 cm. dir. Dik kenarlarını hesaplayınız.

20.) İkizkenar bir üçgenin tabanı 16 cm. ve ikiz kenarlarından biri 20 cm, dir.

a — Bu üçgenin tabana ait yaksekliği ne kadardır?

b — Bu üçgenin alanı nedir?

c — Bu üçgenin alanına aşit karenin bir kenarı ne kadardır?

21.) Alanı 45 metrekare ve tabanı 6 m. olan ikizkenar üçgen biçimindeki bahçenin bir yan kenarı kaç metredir?

22.) Alanı 158,42 metrekare olan ikizkenar dik üçgenin;

a — Bir kenarı kaç metredir? (Cevap: 17,8 m)

b — Bu üçgenin alanına eşit karenin bir kenarı kaç metredir?

23.) Bir kenarı 4 metre olan eşkenar üçgenin,

a — Yüksekliğini,

b — Alanını ve,

c — Bu üçgene eşit alanda bir karenin bir kenarının uzunluğunu bulunuz.

24.) Yüksekliği 6 cm. olan bir eşkenar üçgenin,

a — Bir kenarını,

b — Alanını,

c — Bu üçgene eşit alanda bir karenin bir kenarının uzunluğunu hesaplayınız.

25.) Bir kenarı 9 m. olan bir kare alanına eşit eşkenar üçgenin bir kenarı kaç metredir? (Kare kökü binde bire yakın hata ile hesaplayınız.)

26.) Bir kenarı 5 cm. olan eşkenar üçgenle, bir kenarı 6 cm. olan ikiz kenar dik üçgenin alanları toplamına eşit olan karenin bir kenarının uzunluğu kaç santimetredir?

27.) Köşegenleri e=5,05 m. f=12,12 m. olan eşkenar dörtgenin;

a — Bir kenarı kaç metredir?

b — Bu eşkenar dörtgenin alanına eşit karenin bir kenarı kaç metredir?

28.) Alt tabanının uzunluğu c=92,5 m. üst tabanının uzunluğu

a=20 metre ve yüksekliği h =25 m. olan bir yamuğun alanına eşit bir kare çiziliyor. Karenin bir kenarı kaç metredır?

29.) Bir üçgenin alanı $S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$ ile bellidir. p yarım çevre olduğuna göre kenarları 6 m. , 8 m. , 10 m. olan üçgenin alanını hesaplayınız.

30,) Yarı çapı 30 cm. olan daire alanına eşit karenin bir kenarını virgülden sonra 3 basamak ileriye kadar (binde bire yakın hata ile bulunuz.)

31.) Bir daire 4,2 m. yarı çapındadır. Bu daire alanının 2 misli alandaki yeni dairenin yarıçapı kaç metre olmalıdır? (Pi=22/7 alınız. (Yarı çapı yüzde bire yakın hata ile hesaplayınız.)

32.) Tersi ile bölündüğünde $\frac{729}{1225}$ bölümünü veren kesri bulunuz.

33.) 2400 sayısını tam kare haline koymak için bununla çarpılacak en küçük sayıyı bulunuz? (6 ile niçin?)

34.) İki sayının kareleri toplamı 4 049 ve bunlardan küçüğü 32 olduğuna göre büyüğünü hesaplayınız.

35.) İki sayının kareleri toplamı 6 932 ve karelerinin farkı ise, 4 620 olduğuna göre bu sayıları bulunuz? (34, 76)

36.) İki sayının çarpımı 720 ve bu sayılardan biri diğerinin $\frac{5}{9}$ una eşit olduğuna göre bu sayıları bulunuz. (36, 20)

37,) Kareleri arasındaki fark 21 olan ardışık iki sayıyı bulunuz.

38.) Kareleri arasındaki fark 56 olan ardışık iki tek sayıyı bulunuz. (13, 15)

39.) Kareleri arasındaki fark 60 olan ardışık iki çift sayıyı bulunuz. (14, 16)

40.) Bir sayıya bir defa 7 ekleniyor, bir dcfada bu sayıdan 7 çıkarılıyor. Böylelikle elde edilen iki sayının çarpımı 480 oluyor. Bu sayı nedir? (Cevap 23)

41.) Bir kök almada kalanın, kökün iki katını geçemiyeceğini ıspat ediniz.

42.) Kök almadan $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{4}$ den hangisinin daha büyük olduğunu söyleyiniz.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

KÜP KÖK ALMA TEKNİĞİ

§ 1 — Küp kök Almanın Tekniğiyle İlgili Hazırlayıcı İlk Bilgiler :

I. A) 1 den 10'a kadar (10 hariç), BİR rakamlı (ilk 9 sayının) sayıların,

B) 10 dan 100'e kadar (100 hariç) onar onar İKİ rakamlı sayıların,

C) 100 den 1000'e kadar (1000 hariç) yüzer yüzer ÜÇ rakamlı sayıların, küplerini hesaplıyarak aşağıya yazalım.

A)	$1^3=$	1	$6^3=$	216
	$2^3=$	8	$7^3=$	343
	$3^3=$	27	$8^3=$	512
	$4^3=$	64	$9^3=$	729
	$5^3=$	125		
B)	$10^3=$	1 000	$60^3=$	216 000
	$20^3=$	8 000	$70^3=$	343 000
	$30^3=$	27 000	$80^3=$	512 000
	$40^3=$	64 000	$90^3=$	729 000
	$50^3=$	125 000		
C)	$100^3=$	1 000 000	$600^3=$	216 000 000
	$200^3=$	8 000 000	$700^3=$	343 000 000
	$300^3=$	27 000 000	$800^3=$	512 000 000
	$400^3=$	64 000 000	$900^3=$	729 000 000
	$500^3=$	125 000 000		

Bunlar iyice incelenirse :

I — Bir rakamlı ilk 9 sayıdan herhangi birinin küpünün 1,2 veya 3 rakamlı bir sayı,

II — 10 ile 100 arasındaki (100 hariç) iki rakamlı 90 sayıdan her hangi birinin küpünün $10^3=1000$ ile $100^3=1\,000\,000$ arasında (bir milyon hariç) bulunacağı cihetle 4,5 veya 6 rakamlı bir sayı,

III—100 ile 1 000 arasındaki (1000 hariç) üç rakamlı 900 sayıdan herhangi birinin küpünün, $100^3=1\ 000\ 000$ ile $1\ 000^3=1\ 000\ 000\ 000$ arasında (bir milyar hariç) bulunacağı cihetle 7,8 veya 9 rakamlı bir sayı,

IV — Aynı düşünce tarziyle dört rakamlı bir sayının küpünün 10, 11, 12 rakamlı bir sayı, 5 rakamlı bir sayının küpünün 13, 14, 15 rakamlı bir sayı, ... n rakamlı bir sayının küpünün, 3n-2,3n-1,3n rakamlı bir sayı olduğu anlaşılır.

2) Yukarıdakilerin tersi olarak ;

I — 1, 2, 3 rakamlı bir sayının küp kökünün BİR rakamlı,

II — 4, 5, 6 rakamlı bir sayının küp kökünün İKİ rakamlı,

III — 7, 8, 9 rakamlı bir sayının küp kökünün ÜÇ rakamlı,

IV — 10;11,12 rakamlı bir sayının küp kökünün DÖRT rakamlı,

.....

.....

3n-2,3n-1,3n rakamlı bir sayının küp kökünün (n) rakamlı, Bir sayı olması icabeder.

3) Buraya kadar olan yazdıklarımızı şu iki kaide içinde özetliyelim :

Kaide: I— Her hangi bir sayının küpünün rakamları sayısı, ya küpü alınan sayının rakamları sayısının 3 katı kadar. veya 3 katından bir veya iki eksiği kadar olur. Meselâ: 957 sayısı 3 basamaklı olduğuna göre küpü, 9 veya 8 veya 7 basamaklıdır. Burada, $957^3=876\ 467\ 493$ olup 9 basamaklıdır.

Kaide: II— Birincinin tersine olarak; herhangi bir sayının küp kökünün rakamları sayısı, verilen sayının rakamları sayısının üçte biri veya rakamları sayısının bir fazlasının üçte biri kadar veya rakamları sayısının iki fazlasının üçte biri kadar rakamlıdır. (Verilen sayının rakamları sayısı üçe bölünürse küp kök bunun üçte biri kadar rakamlı; 3'e bölünemezse verilen sayının rakamları sayısının bir veya iki fazlasının üçte biri kadardır.)

Meselâ: 3 rakamlı 958 in küp kökü bir rakamlı, 4 rakamlı 1 923 ün küp kökü ise rakamları sayısından 2 fazlasının üçte biri kadar yani iki rakamlı; gene 5 rakamlı 34 540 ın küp kökü ise rakamları sayısının bir fazlasının üçte biri kadar yani iki rakamlı olacaktır.

4) İşte bu sebeplerden dolayıdırki, küp kökü alınacak sayının rakamları birler basamağından başlanarak (sağdan sola doğru) üçer üçer

guruplara ayrılır. Bu guruplardan her birine küp kökte bir rakam tekabül eder.

En başta olan gurup 3 rakamlı, 2 rakamlı, 1 rakamlı olabilir.

Buna göre küp kök olarak elde edilecek sayının rakamları sayısı, ayrılan gurupların sayısı kadar olmalıdır.

§ 2 - KÜP KÖK ALMANIN NAZARİYATI :

A.) Küp kök almanın dayandığı temel özdeşlikler :

B.) Küp kök almanın temel özdeşliklerle nümerik misaller üzerinde izahı :

A.) KÜP KÖK ALMANIN DAYANDIĞI TEMEL ÖZDEŞLİKLER:

Küp kök alma kaidesi cebirin şu özdeşliklerinden istifade edilerek çıkartılmıştır.

1.) $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

$(x+y)^3 = x^3+\left[3x^2+(3x+y)y\right].\ y$

2.) $(x+\overbrace{y+z}^{Y})^3 = x^3+3x^2Y+3xY^2+Y^3 \qquad Y=\overbrace{y+z}$

$(x+y+z)^3 = x^3+\left[3x^2+(3x+y+z)\ (y+z)\right]\ (y+z).$

Küp kökün birler basamağı x, onlar basamağı y, yüzler basamağı z farzedilerek yukarıdaki özdeşlikler yeniden bu esasa göre düzenlenirse :

3.) $(10y+x)^3 = 1\ 000\ y^3+300\ y^2x+30\ yx^2+x^3$

$(10y+x)^3 = 1\ 000\ y^3+\left[300\ y^2+(30\ y+x)x\right].x$

4.) $(100\ z+10y+x)^3 = 1\ 000\ 000\ z^3+\left[300z^2+(30z+y)y\right].\ 10^3+$

$+\left\{300\ (10z+y)^2+\left[30\ (10z+y)+x\right].\ x\right\}.x$

B.) KÜP KÖK ALMANIN TEMEL ÖZDEŞLİKLERLE NÜMERİK MİSALLER ÜZERİNDE İZAHI :

Küp kök Nasıl Alınır

§ 1 de Küp kök almanın tekniğiyle ilgili hazırlayıcı ilk bilgileri incelerken özet olarak şunları öğrenmiştik :

Bir, iki, üç rakamlı sayılar 1 ile 1 000 arasında (1 000 hariç) olup küp kökleri 1 ile 10 arasında yani bir rakamlı bir sayıdır. Yine 4, 5, 6

rakamlı sayılar 1 000 ile 1 000 000 (milyon hariç) arasında bulunup küp kökleri 10 ile 100 arasında bulunacaklarından 2 rakamlı bir sayıdır.

Genel olarak (3n-2), (3n-1), 3n rakamlı bir sayının küp kökü n rakamlı bir sayıdır;

Küp kök almayı 3 hal altında inceliyelim :

BİRİNCİ HAL : Küp kökü alınacak sayı, tam küp ve 1 ile 1 000 arasında ise küp kök şu cetvelle hemen bulunabilir.

Küp kökler :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Küpler :	1	8	27	64	125	216-343		512	729-1 000	

İkinci sıradaki sayılar birinci sıradaki sayıların küpleridir.

Birinci sıradaki sayılar, ikinci sıradaki sıradaki sayıların küp kökleri olduğu gibi bu sayılar arasındaki sayıların da küp köklerinin tam sayılarıdır.

İKİNCİ HAL : Küp kökü alınacak sayı 1 000 ile 1 000 000 ara ise küp kökü iki rakamlı (iki basamaklı) bir sayı olacağından bu sayının küp kökünü nasıl alacağımızı inceliyelim.

İki rakamlı (iki basamaklı) bir sayı (yx) biçiminde olsun. x birler basamağı, y de onlar basamağındaki sayı olduğundan bu sayıyı cebirsel olarak (10 y + x) biçiminde yazabiliriz. Şu halde küp kökü (10y+x) olan sayı; $(10\ y + x)^3$ dür. Bunu açalım.

$$(10\ y + x)^3 = 1\,000\ y^3 + 300\ y^2\ x + 30\ y\ x^2 + x^3$$

$$(10\ y + x)^3 = 1\,000\ y^3 + [300\ y^2 + (30\ y + x)\ .\ x].\ x$$

Bu esası gözönünde tutarak 91 125 sayısının küp kökünü arayalım.

$$(10\ y + x)^3 = 1\,000\ y^3 + [300\ y^2 + (30\ y + x)x].\ x = 91\,125$$

İki tarafın küp kökünü alalım.

$$\sqrt[3]{1\,000\ y^3 + [300y^2 + (30y+x)x]x} = \sqrt[3]{64\,000 + 27\,125}$$

$10\ y = 40, x = 5$

$1\,000\ y^3$ / $64\,000$

$[300y^2+(30y+x)x]x$	: $300\ y^2$	$27\,125$	: $300y^2 \cong 5$
$300y^2x$	$= 24\,000$	$27\,125$	$271{,}25 : 48 \cong 5$
$30yx^2$	$= 3\,000$	0	
x^3	$= + 125$		
	$27\,125$		

Yukarıdaki tabloda görüldüğü üzere 91 125 sayısının küp kökünü

almak için evvelâ, 91 125 sayısını 64 000+27 125 olarak iki parçaya ayıralım.

Çünkü; 40 ın küpü 64 000, 50'nin küpü 125 000 olup, 125 000 verilen sayıdan büyüktür. O halde aranan küp kökün onlar rakamı 4 tür. Şu halde

$1\ 000\ y^3 = 64\ 000$ iki taraftan çıkarılarak bir tarafta;

$[\ 300\ y^2 + (30\ y + x)\ x\ ]\ .x.$ diğer tarafta da 27 125 kalır.

$[\ 300\ y^2 + (30\ y + x)\ x\ ]\ x$; ifadesi $300\ y^2$ ye bölünürse yaklaşık olarak x elde edilir ki buda 5 tir. ($27\,125 : 300\ y^2$ veya $27\,125 : 4800 \cong 5$)

Birinci tarafta y yerine 4,x yerine 5 konur. Ve

$[\ 300\ y^2 + (30\ y + x)\ x\ ]\ .\ x$ ifadesinin nümerik değeri hesaplanır. Bu hesaplama şu Iki tarzda yapılabilir.

a - $300\ y^2\ x = 24\,000$

$30\ y\ x^2 = 3\,000$

$x^3 = + 125$

$27\,125$

b - $3.\ 40^2.\ 5 = 24\,000$

$3.\ 40.\ 5^2 = 3\,000$

$5^3 = + 125$

$27\,125$

Bu iki tarz hesaplamada da, birinci taraf 27 125 olarak hesaplanmıştır. İkinci tarafta 27 125 idi. Her iki taraftan 27 125 cıkarılırsa her iki tarafta da 0 kalacağından aranan küp kök 45 tir.

ÜÇÜNCÜ HAL : Küp kökü alınacak sayı 1 000 000 dan büyük ise, küp kökü 3 rakamlı (3 basamaklı) veya daha çok rakamlı bir sayı olacağından küp köklerinin bulunması, aynen ikinci hale göre yapılabileceği apaçıktır.

Eğer verilen sayının küp kökü 3 rakamlı bir sayı ise bu küp kök $(100\ z + 10\ y + x)$ biçiminde olacağı için küp kökü alınacak sayı ;

$$(100\ z + 10\ y + x)^3 = 1\,000\,000\ z^3 + [\ 300\ z^2 + (30\ z+y)\ y]y.\ 10^3 + \{300\ (10\ z + y)^2 + [\ 30\ (10\ z+y) + x\ ]\ .x\}\ .\ x$$

şeklindedir.

1 000 000 dan büyük sayıların küp kökleride bu özdeşliğe dayanılarak bulunabilir. (1 000 000 dan büyük sayıların küp köklerinin nasıl bulunacağına dair nümerik misali de daha sonra vereceğiz.)

Buna göre herhangi bir sayının küp kökünü bulmak için esası yukarıdaki açıklamalardan başka bir şey olmıyan aşağıdaki pratik kaideyi verelim :

Bir Tam Sayının Küp kökünü Almak

Yapılacak işlemleri şöylece sıralıyabiliriz :

1.) Küp kökü alınacak sayı sağdan başlanarak sola doğru üçer üçer gruplara ayrılır. Solda en son kalan gurup 2 veya 1 rakamlı olabilir.

2.) Küp kökün soldan ilk rakamını bulmak için verilen sayının en solundaki gurupta bulunan sayının küp kökü aranır. Bulunan bu sayının küpü verilen sayının sol gurup rakamlarının teşkil ettiği sayıdan çıkarılır.

3.) Kalanın sağına soldan ikinci gurup indirilir. Bu sayının sağından iki rakam ayrılarak (100'e bölünerek) diğer kısmı küp kökün ilk rakamı (onlar basamağı) olarak bulunan sayının karesinin 3 katına bölünür.

4 a) Bu bölüm küp kökün ikinci rakamına (birler basamağına) eşit veya ondan büyüktür.

b) Küp kökün bulunan rakamının (onlar basamağının) 3 katının önüne bölüm olarak bulunan rakam konur. (Kökün bulunan rakamı y ise, 3 katı 3 y eder. Bunun önüne bölüm olarak bulunan x in yazılmasiyle sayı (30 y+x) biçimine girer.)

c) Bu sayı , yine bu bölümün gösterdiği sayı ile çarpılır. $(30\ y + x)\ x$ olur.

d) Ve bu çarpıma, kökün bulunan rakamının gösterdiği sayı karesinin 3 katının önüne iki sıfır konarak $(3\ y^2.\ 100)$ ilâve edilir.

e) Elde edilen toplam tekrar bu sayı ile çapılır. Netice :

$[\ 300\ y^2 + (30\ y + x)\ x.\ ]\ .\ x$ demektir.

f) Çarpım ikinci kalana eşît veya ondan küçükse denenen rakam küp kökün ikinci rakamı (birler basamağı) olarak alınır. Bulunan bu çarpım kalandan büyükse, sıra ile bu rakamdan birer küçük olan rakamlar tecrübe edilir.

Böylece 3 ve 4 deki işlemler küp kökün bütün rakamları bulununcaya kadar tekrarlanır.

Yukarıdaki 4. cü işlemi bir başka tarzda şöyle de yapabiliriz. (Küp kök almada en çok tercih edilen tarz ikinci tarzdır.)

4 a) Bu bölüm küp kökün ikinci rakamına (birler basamağına) eşit veya ondan büyüktür.

b) Küp kökün bulunan rakamının (onlar basamağının) onla çarpımının karesi, bölüm olarak bulunan (birler basamağı) rakamla çarpılır.

Çarpımın 3 katı alınır. Buna,

c) Küp kökün bulunan rakamının (onlar basamağının) 10 la çarpımı ile; bölüm olarak bulunan (birler basamağı) rakamın karesi çarpılır.

Çarpımın 3 katı alınır. b ve c'deki ifadelerin toplamına,

d) Bölüm olarak bulunan rakamın (birler basamağının) küpü alınarak eklenir.

b, c, d deki ifadelerin toplamı ikinci kalana eşit veya ondan küçükse denenen rakam küp kökün ikinci rakamı olarak alınır.

b, c, d deki ifadelerin toplamı ikinci kalandan büyükse sıra ile bu rakamdan birer küçük olan rakamlar tecrübe edilir. Böylace 3 ve 4 de ki işlemler küp kökün bütün rakamları bulununcaya kadar tekrarlanır.

§ 3 — Küp kök Almanın Pratik Olarak Nümerik Misaller Üzerinde İzahı :

KÜP KÖK ALMA İŞLEMİ İÇİN İLK HAZIRLIKLAR :

$\sqrt[3]{A}$ 1 — Küp kökü alınacak sayı kök işareti içine yazılır. (Bu kısım şekilde A harfiyle gösterilmiştir.)

$\sqrt[3]{A}$ 2 — Kök işaretinin iki kolu arasına küçük boyda 3 rakamı yazılır. (Kare kökte 2 yazılabilir. Umumiyetle kare kökte kök işaretinin iki kolu arasına 2 yazılmaz. Kök işaretinin iki kolu arasında rakam yoksa kök, kare kök demektir.)

$\sqrt[3]{A}$ 3 — Kök işaretinin yatay kenarı (üst kenarı) sağa doğru uzatılır.

$\sqrt[3]{A}$ 4 — Küp kökü alınacak sayının sağından geçen ve kök işaretinin uzatılan yatay kenarını kesen düşey bir doğru çizilir.

$\sqrt[3]{A}\,B$ 5 — Kök işaretinin uzatılan yatay kenarının sağ üst kısmına küp kök yazılır. (Bu kısım şekilde B harfiyle gösterilmiştir.)

$$\sqrt[3]{A}\ \Big|\ \begin{array}{c} B \\ \hline C \end{array}$$

6 — Kök işaretinin uzatılan yatay kenarının sağ alt kısmınada (düşey doğrunun sağına) küp kök alırken yapılan işlemler yazılır. (Bu kısım şekilde C harfiyle gösterilmiştir.)

Misal : Dört, beş veya altı basamaklı bir sayının küp kökünü hesaplamak : 21 952 sayısının küp kökünü hesaplıyalım.

$$\sqrt[3]{\begin{array}{c} \overline{21}\ \overline{952} \\ A \end{array}}$$

1 — Küp kökü alınacak sayının basamakları sağdan sola doğru üçer üçer guruplara ayrılır. (En soldaki gurup 2 veya 1 rakamlı da kalabilir.) Misalde soldaki gurup 2 rakamlıdır. İki gurup meydana geldiği için küp kökün 2 basamaklı bir sayı olduğu söylenir.

$$\sqrt[3]{\begin{array}{c} \overline{21}\ \overline{952} \\ A \end{array}}\ \Big|\ \begin{array}{c} B \\ 2 \\ \hline 2\times2\times2=8 \end{array}$$

2 — Ayrılan guruplardan en soldaki gurubun yaklaşık olarak küp kökü hesaplanır. Örnekte en soldaki gurup 21 dir. 21 in küp kökü 3 olamaz. Çünkü 3 ün küpü 27 dir ve 21 içinde yoktur. 2'nin küpü olan 8, 21 in içinde vardır. O halde 21 in yaklaşık olarak küp kökü 2 dir. 2 yanda görüldüğü gibi B harfinin yerine yazılır.

Bulunan 2 aranan küp kökün onlar basamağıdır. Buraya kadar olan işlemlerle küp kökün onlar basamağını bulduk. Şimdi küp kökün birer basamağını bulmağa çalışalım.

$$\sqrt[3]{\begin{array}{c} \overline{21}\ \overline{952} \\ \underline{/\ 8} \\ 13\ 952 \end{array}}\ \Big|\ \begin{array}{c} 2 \\ \hline 2\times2\times2=8 \end{array}$$

3 — Bulunan 2'nin küpü alınır. 2'nin küpü olan 8, 21'in altına yazılır. Ve 21 den çıkartılır. Misalde fark 13 kalmıştır. 13'ün sağına küp kökü alınan sayının soldan ikinci (üç basamaklı) gurubu olan 952 indirilerek 13 952 sayısı bulunur.

$$\sqrt[3]{\begin{array}{c} \overline{21}\ \overline{952} \\ \underline{/\ 8} \\ 13\ 952 \\ \underline{/13\ 952} \\ 0 \end{array}}\ \Big|\ \begin{array}{c} 28 \\ \hline 2\times2\times2=8 \\ \hline 3.20^2.9=10\ 800 \\ 3.20.9^2=\ 4\ 860 \\ 9^3=+\ 729 \\ \hline 16\ 389 \\ \hline 3.20^2.8=\ 9\ 600 \\ 3.20.8^2=\ 3\ 840 \\ 8^3=+\ 512 \\ \hline 13\ 952 \end{array}$$

4 — 13 952 sayısının sağından iki rakam ayrılarak (100'e bölünerek) kalan kısmı, Küp kökün ilk rakamı (onlar basamağı) olarak bulunau 2 nin karesinin 3 katına bölünür. $\left(\frac{139,52}{12} \cong 9\right)$

5. a - Bu bölüm (misalde 9) kökün ikinci rakamına (birler basamağına) eşit veya ondan büyüktür. Hangisi olduğunu araştıralım.

b — Küp kökün bulunan rakamının (onlar basamağındaki 2'nin 10'la çarpımının karesi, bölüm olarak bulunan (birler basamağındaki 9) rakamla çarpılır. Çarpımın 3 katı alınır.

$3.\ (2.\ 10.)^2.\ 9=3.400.9 = 10\ 800$ buna;

c — Küp kökün bulunan rakamının (onlar basamağındaki 2'nin) 10 ile çarpımı ile; bölüm olarak bulunan (birler basamağındaki 9'un) rakamın karesi çarpılır. Çarpımın 3 katı alınır.

$3.2.10.9^2 = 3.20.9^2 = 4\ 860$

b ve c deki ifadelerin toplamına,

d — Bölüm olarak bulunan rakamın (birler basamağındaki 9 un) küpü alınarak eklenir. $9^3=729$ b, c, d deki ifadelerin toplamı ikinci kalana eşit veya ondan küçükse denenen rakam küp kökün ikinci rakamı olarak alınır.

İşlemleri sıralıyalım. Ve toplıyalım.

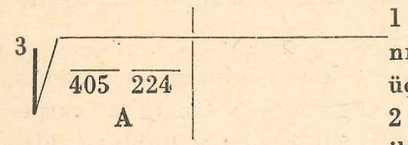
$$\begin{array}{rl} 3.\ (2.10)^2.\ 9 & =10\ 800 \\ 3.\ (2.10).\ 9^2 & =\ 4\ 860 \\ 9^3 & =+\ 729 \\ \hline & 16\ 389 \end{array}$$

Toplam ikinci kalandan büyük olduğu için birler basamağı 9 olamaz. 8 i denemek lâzımdır. a, b, c, d deki işlemleri 8 için yaparsak;

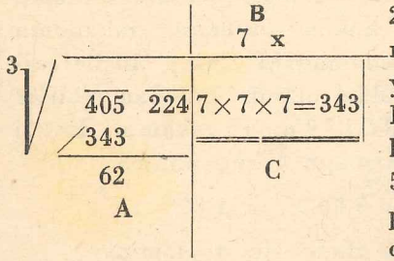
$3.(2.10)^2.\ 8 = 9\ 600$
$3.(2.10).\ 8^2 = 3\ 840$
$8^3 = +\ 512$
$13\ 952$

Bulduğumuz bu toplam ikinci kalana eşit olduğu için küp kökün birler basamağı 8 dir. verilen sayının küp kökü 28 olur.

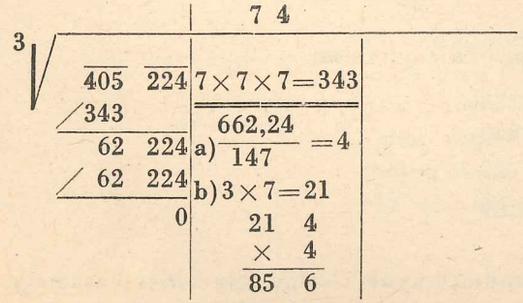
Misal : 2.) 405 224 sayısının küp kökünü hesaplıyalım.



1 — Küp kökü alınacak 405 224 sayısının basamakları sağdan sola doğru üçer üçer guruplara ayrılır. (En soldaki grup 2 veya 1 rakamlıda olabilir.) Burada iki gurup meydana geimiştir. Buradan küp kökün 2 basamaklı bir sayı olduğu söylenir.



2 — Ayrılan guruplardan en soldaki gurubun (3,2 veya 1 basamaklı sayının) yaklaşık olarak küp kökü hesaplanır. Misalde en soldaki gurup 405 tir. 405 in küp kökü 8 olamaz. Çünkü 8 in küpü 512 dir ve 405 ten büyüktür. 7 nin küpü olan 343,405 in içinde vardır. O halde 405 in yaklaşık olarak küp kökü 7 dir. 7 yanda görüldüğü gibi B harfinin yerine yazılır. Bulunan 7 rakamı aranan küp kökün onlar basamağıdır. Buraya kadar olan işlemlerle küp kökün onlar basamağını bulduk. Şimdi küp kökün birler basamağını bulmağa çalışalım.



3 — Bulunan 7 nin küpü alınır. 7 nin küpü olan 343, 405 in altına yazılır ve 405 ten çıkartılır. Misalde fark 62 kalmıştır. 62 kalanının sağına küp kökü alınan sayının soldan ikinci (üç basamaklı) gurubu olan 224 indirilerek, 62 224 sayısı bulunur. Bu sayının sağından iki basamak ayrılarak (100'e bölünerek)

diğer kısmı, küp kökün ilk rakamı (onlar basamağı) olarak bulunan 7 nin karesinin üç katına bölünür.
($\frac{622,24}{147} \cong 4$)

4 a — Bu bölüm (Burada 4) kökün ikinci rakamına (birler basamağına) eşit veya ondan büyüktür.

b — Küp kökün bulunan rakamının (onlar basamağının) burada 7 nin üç katının önüne, bölüm olarak bulunan rakam (Burada 4) konur.

$3\times7=21$,
$21\ 4$
$\times\ 4$
$85\ 6$

c — ve bu çarpıma (856 ya) kökün bulunan rakamının (onlar basamağının) gösterdiği sayı karesinin 3 katının önüne iki sıfır konarak eklenir.

(3.49.100 = 14 700)
(856 + 14 700) =

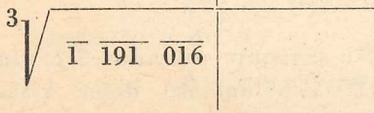
d — Elde edilen toplam tekrar bolüm olan 4 ile çarpılır.

(856 + 14 700) = 15 556
15 556 × 4 = 62 224

Çarpım 62 224 tür. Bu ikinci kalana eşit olduğundan denenen 4 rakamı küp kökün ikinci rakamı olarak (birler basamağı olarak) bulunur. En son elde ettiğimiz 62 224 sayısı kalandan çıkartılırsa sıfır kalır. Küp kök 74 olur.

Bulunan bu çarpım kalandan büyükse sıra ile 4 ten birer küçük olan 3, 2, ve hatta bir rakamları sıra ile tecrübe edilir.

Misal : 3.) 7, 8, 9 basamaklı bir sayının küp kökünü hesaplamak 1 191 016 sayısının küp kökünü hesaplayalım.



1 — Küp kökü alınacak bu sayının basamakları sağdan sola doğru üçer üçer guruplara ayrılır. Burada en soldaki gurup 1 rakamlıdır. 3 gurup meydana geldiği için küp kökün 3 basamaklı bir sayı olduğu söylenir.

	1 x x
$\sqrt[3]{\overline{1}\ \overline{191}\ \overline{016}}$	$1\times1\times1=1$
$\angle 1$	
0	

2 — Ayrılan guruplardan en soldaki gurubun yaklaşık olarak küp kökü hesaplanır. Misalde en soldaki gurup 1 olduğundan bunun küp kökü 1 dir. 1 yanda görüldüğü gibi B harfinin yerine yazılır. Bulunan bir rakamı aranan küp kökün yüzler basamağıdır. Küp kökün yüzler basamağını bulduk. Şimdi de küp kökün onlar basamağını arıyalım.

	1 x x
$\sqrt[3]{\overline{1}\ \overline{191}\ \overline{016}}$	$1\times1\times1=1$
$\angle 1$	
0 191	

3 — Bulunan 1'in küpü alınır. 1 in küpü olan 1, 1'in altına yazılarak çıkartılır. Misalde fark sıfırdır. Sıfırın sağına küp kökü alınan sayının soldan ikinci (3 basamaklı) gurubu olan 191 indirilir.

$$\frac{191}{100} = 1{,}91$$

$$\frac{1{,}91}{1^2\times3} \cong 0$$

4 — 191 sayısının sağından iki rakam ayrılarak (100'e bölünerek) diğer kısım, küp kökün ilk rakamı (yüzler basamağı) olarak bulunan 1'in karesinin 3 katına bölünür. $\left(\frac{1{,}91}{1^2.3} \cong 0\right)$

5 — Bu bölüm (burada 0) küp kökün ikinci rakamına (onlar basamağına) eşit veya ondan büyüktür. Sıfır ilk 9 sayının en küçüğü olduğu için, bundan küçüğü düşünülemez. Şu halde küp kökün onlar basamağı (0) dir. Bu sıfır; biraz önce bulduğumuz 1'in sağına yazılır. (B deki yerine)

	10 x
$\sqrt[3]{\overline{1}\ \overline{191}\ \overline{016}}$	$1\times1\times1=1$
$\angle 1$	
0 191 016	191:100=1,91 1,91: 3=0

6 — Buraya kadar olan işlemlerle küp kökün yüzler ve onlar basamaklarını bulduk. Şimdi küp kökün birler basamağını arıyalım. 191 kalanının sağına küp kökü alınan sayının üçüncü (3 basamaklı) gurubu olan 016 indirilerek, 191 016 sayısı bulunur.

7 — 191 016 sayısının sağından 2 rakam ayrılarak (100'e bölünerek) diğer kısmı küp kökün soldan ilk 2 rakamı (yüzler ve onlar) olarak bulunan 10'un karesinin

	1 0 6
$\sqrt[3]{\overline{1}\ \overline{191}\ \overline{016}}$	$1\times1\times1=1$
$\angle 1$	191 : 100=1,91 1,91 : 3=0
0 191 016	191 016: 100=1 910,16
$\angle$ 191 016	$\frac{1\,190{,}16}{10^2\times3} = \frac{1\,190{,}16}{300} \cong 6$
0	$3.\ (100)^2.6=180\ 000$ $3.\ (100).6^2=\ 10\ 800$ $6^3=+\ 216$ 191 016

üç katına bölünür. $\left(\frac{1910{,}16}{300} \cong 6\right)$

8 a — Bu bölüm (burada 6) kökün üçüncü rakamına (birler basamağına) eşit veya ondan büyüktür. Hangisi olduğunu araştıralım.

b — Küp kökün bulunan ilk iki rakamının (yüzler ve onlar basamağındaki 10'un) 10 ile çarpımının karesi, Bölüm olarak bulunan birler basamağındaki 6 rakamiyle çarpılır. Çarpımın 3 katı alınır.

$3\ .\ 100^2\ .\ 6 = 180\ 000$ Buna;

c — Küp kökün bulunan ilk iki rakamının (yüzler ve onlar basamağındaki 10'un) 10 ile çarpımiyle, bölüm olarak bulunan (birler basamağındaki 6 nın) rakamın karesi çarpılır. Çarpımın 3 katı alınır.

$3\ .\ 100\ .\ 6^2 = 10\ 800$

b ve c deki ifadelerin toplamına;

d — Bölüm olarak bulunan rakamın (birler basamağındaki 6 nın) küpü alınarak eklenir. $6^3 = 216$

b, c, d deki ifadelerin toplamı üçüncü kalana eşit veya ondan küçükse denenen rakam küp kökün üçüncü rakamı olarak alınır.

İşlemleri sıralıyalım ve toplıyalım :

$$\begin{aligned} 3\ .\ 100^2\ .\ 6 &= 180\ 000 \\ 3\ .\ 100\ .\ 6^2 &= \ \ 10\ 800 \\ 6^3 &= +\ \ 216 \\ \hline &\ \ 191\ 016 \end{aligned}$$

Toplam üçüncü kalana eşit olduğu için küp kökün birler basamağı 6 dır.

Verilen sayının küp kökü 106 olur.

Misal : 4 .) 15 070 223 sayısının küp kökünü 1, 2 ve 3 üncü misallerdeki açıklamalara dayanarak hasaplıyalım.

$\sqrt[3]{}$	2 4 7	
15 070 223	$2\times2\times2=8$	
8		
7 070	$3\,.\,20^2\,.\,5=$ 6 000	$\frac{70{,}70}{3.2^2}=\frac{70{,}70}{12}\cong 5$
5 824	$3\,.\,20\,.\,5^2=$ 1 500	
1 246 223	$5^3=+$ 125	
1 245 223	7 625	
1 000		
	$3\,.\,20^2\,.\,4=$ 4 800	$\frac{12\,462{,}23}{3.24^2}=\frac{12\,462{,}23}{1728}\cong 7$
	$3\,.\,20\,.\,4^2=$ 960	
	$4^3=+$ 64	
	5 824	
	$3.240^2.7=$ 1 209 600	
	$3.240.7^2=$ 35 280	
	$7^3=+$ 343	
	1 245 223	

Verilen sayının küp kökü 247 kalanıda 1 000 dir. Yani 15 070 223 sayısının küp kökü tam olamaz. Küp kökü tam olmıyan sayıların küp kökünü alırken küp kökü istenilen her hangi bir basamağa kadar yürütebiliriz. Sayıların küp kökünü bir basamak yürütmek için kalanın sağına 3 sıfır konarak kök almağa devam edilir. Bu şekilde küp kökü onda bire yakın hata ile, yüzde bire yakın hata ile, binde bire yakın hata ile, ... hesaplamak mümkündür.

Misal : 5.) Virgülden sonra bir basamak ilerletmek üzere (onda bire yakın hata ile) 1, 2 ve 3 üncü misallerdeki açıklamalara göre, 1 958 sayısının küp kökünü hesaplıyalım.

$\sqrt[3]{}$	1 2, 5	
1 958	$1\times1\times1=1$	
1		
0 958	$3\,.\,10^2\,.\,3=$ 900	$\frac{9{,}58}{1^2.3}\cong 3$
728	$3\,.\,10\,.\,3^2=$ 270	
230 000	$3^3=+27$	
225 125	1 197	
4 875		
	$3\,.\,10^2\,.\,2=$ 600	$\frac{2300{,}00}{3\,.\,12^2}\cong 5$
	$3\,.\,10\,.\,2^2=$ 120	
	$2^3=+$ 8	
	728	
	$3\,.\,120^2\,.\,5=$ 216 000	
	$3\,.\,120\,.\,5^2=$ 9 000	
	$5^3=+$ 125	
	225 125	

1 958 Sayısının küp kökü 12 kalanı da 230 dur. Kök almayı virgülden sonra bir ondalık basamak ilerletebilmek için ikinci kalan 230 un sağına, 3 sıfır koruz. 230 000 eder. Bunu 100 ' e böleriz. 2300 olur. 2300 ü küp kök olarak bulunan 12 nin karesinin 3 katına bölersek virgülden sonraki ilk ondalık basamağın rakamı çıkmış olur. $\left(\frac{2300}{432}\cong 5\right)$

Virgülden sonraki ilk ondalık basamak 5 veya bundan küçük rakamlar olabilir. 1 958 sayısının küp kökü 12,5 ve kalanı 4,875 tir.

§ 4—Ondalık Kesirlerin Küp kökünün Hesabı

Ondalık kesirlerin küp köklerini almağa başlamadan önce;

1—) Tam sayı kısmının basamaklarını virgülden itibaren sağdan sola doğru.

2—) Ondalık kısmın basamaklarını virgülden itibaren soldan sağa doğru üçer üçer guruplara ayırmalıdır. Ondalık kısmın

basamaklarını üçer üçer ayırırken en soldaki basamak 1 veya 2 rakamlı kalırsa önüne 2 veya 1 sıfır koyarak üç basamaklı bir gurup yapılır. Bundan sonra tam sayıların küp köklerini almada olduğu gibi hareket edilir.

Yalnız tam sayı kısmının rakamları bitince bir virgül koyarak işleme devam edilir.

Misal : 31,255 875 ondalık kesrinin küp kökünü virgülden sonra ikinci ondalık basamağa (Yüzdebire yakın hata ile) hesaplıyalım :

		3, 1 5
$\sqrt[3]{}$	$\overline{31}, \overline{255}\ \overline{875}$	$3\times3\times3=27$
	$\angle\ 27$	
	4 255	$3\,.\,30^2\,.\,1 = 2\,700$
		$3\,.\,30\,.\,1^2 = 90$
	$\angle\ 2\,791$	$1^3 = +\ 1$
	1 464 875	$2\,791$
	$\angle\ 1\,464\,875$	
	0	$3\,.\,310^2\,.\,5 = 1441500$
		$3\,.\,310\,.\,5^2 = 23250$
		$5^3 = +\ 125$
		1464875

$4255 : 100 = 42{,}55$

$\frac{42{,}55}{3\,.\,3^2} \cong 1$

$1464875 : 100 = 14648{,}75$

$\frac{14\,648{,}75}{3\,.\,31^2} \cong 5$

1— Bu ondalık kesir küp kök işareti içine alındıktan sonra tam sayı kısmının basamaklarını virgülden itibaren sağdan sola doğru ondalık kısmının basamaklarını virgülden itibaren soldan sağa doğru üçer üçer guruplara ayırmalıdır. (Ondalık kısmın basamaklarını üçer üçer ayırırken en soldaki basamak 1 veya 2 rakamlı kalırsa önüne 2 veya 1 sıfır konarak 3 rakamlı bir gurup yapılır.)

2— Tam sayı kısmının en soldaki gurubunun yaklaşık olarak küp kökü hesaplanır. Misalde en soldaki gurup 31 dir. Küp kökü de 3 tür. 3 ün küpü alınır ve en soldaki guruptan çıkarılır. Burada fark 4 tür. Bulunan 3 küp kökün tam sayı kısmının birler basamağıdır. 4 ' ün sağına ondalık kısmın ilk gurubu 255 indirilir.

3 — Buraya kadar olan işlemlerle küp kökün tam sayı kısmının birler basamağını bulduk. Kök olarak bulunan 3 ün sağına bir virgül koyduktan sonra küp kökün ondalık kısmının ilk basamağını arıyalım. Tam sayıların küp kökünü almada olduğu gibi bir an için virgülleri nazarı dikkate almıyacağız.

4 255 sayısının sağından iki rakam ayrılarak (100'e bölünerek) diğer kısmı, küp kökün ilk rakamı (birler basamağı) olarak bulunan 3'ün karesinin 3 katına bölünür. ($42{,}55 : 27 \cong 1$)

4 — a.) Bu bölüm (burada 1) kökün virgülden sonra ilk rakamına (onda birler basamağına) eşit veya ondan büyüktür. Hangisi olduğunu araştıralım:

b.) Küp kökün bulunan rakamının (birler basamağındaki 3 ' ün) 10 ile çarpımının karesi bölüm olarak bulunan (onda birler basamağındaki 1) rakamla çarpılır. Çarpımın 3 katı alınır. $3.30^2.1 = 900$ buna,

c.) Küp kökün bulunan rakamının (birler basamağındaki 3'in) 10 ile çarpımı ile, bölüm olarak bulunan (birler basamağındaki 1'in) rakamın karesi çarpılır. Çarpımın 3 katı alınır. $3.30.1^2 = 90$, b ve c deki ifadelerin toplamına,

d.) Bölüm olarak bulunan rakamın (onda birler basamağındaki 1'in) küpü alınarak eklenir. $1^3 = 1$

b, c, d deki ifadelerin toplamı ikinci kalana eşit veya ondan küçükse denenen rakam küp kökün onda birler basamağı olarak alınır.

$3.30^2.1 = 2\,700$

$3.30.1^2 = 90$

$1^3 = +\ 1$

$2\,791$

Bulunan bu toplam 4 255 ten küçük olduğu için 4 255 in altına yazılarak çıkartılır. Onda birler basamağı 1 dir. B deki yerine yazılır.

5 — Buraya kadar olan işlemlerle küp kökün birler ve onda birler basamağını bulduk. Şimdi küp kökün yüzde birler basamağını bulalım.

1 464 kalanının sağına küp kökü alınan sayının, ikinci 3 basamaklı ondalık gurubu olan 875 indirilerek 1 464 875 sayısı bulunur.

6 — 1 464 875 sayısının sağından 2 rakam ayrılarak (100'e bölünerek) diğer kısmı, küp kökün soldan ilk iki rakamı olarak bulunan 31'in karesinin 3 katına bölünür. ($1\,4648{,}75 : 3.31.31 \cong 5$)

7 —a.) Bu bölüm (burada 5) kökün, yüzde birler basamağına eşit veya ondan büyüktür. Hangisi olduğunu araştıralım.

b.) Küp kökün bulunan ilk 2 rakamının (31'in) 10 ile çarpımının karesi, bölüm olarak bulunan (yüzde birler basamağındaki 5) rakamla çarpılır. Çarpımın 3 katı alınır. $3.310^2.5 = 1\ 441\ 500$ buna;

c.) Küp kökün bulunan ilk 2 rakamının (31'in) 10 ile çarpımı ile, bölüm olarak bulunan 5'in karesi çarpılır. Çarpımın 3 katı alınır.

$3 . 310 . 5^2 = 23\ 250$ b , c deki ifadelerin toplamına;

d.) Bölüm olarak bulunan 5 rakamının küpü alınarak eklenir. $5^3 = 125$

b , c , d deki ifadelerin toplamı 3. cü kalana eşit veya ondan küçükse denenen rakam küp kökün yüzdebirler basamağı olarak alınır.

İşlemleri sıralayalım ve toplayalım :

$$\begin{aligned} 3 . 310^2 . 5 &= 1\ 441\ 500 \\ 3 . 310 . 5^2 &= 23\ 250 \\ 5^3 &= +\ 125 \\ &\overline{1\ 464\ 875} \end{aligned}$$

Toplam üçüncü kalana eşit olduğu için küp kökün yüzdebirler basamağı 5 tir. Verilen ondalık kesrin küp kökü 3,15 tir.

NOT : 31,255 875 ondalık kesrinin küp kökünü bu kesri bayağı kesir haline çevirdikten sonra da hesaplayabiriz. Şöyle ki :

$$31{,}255\ 875 = \frac{31\ 255\ 875}{1\ 000\ 000} \quad \text{olduğu düşünülürse;}$$

$$\sqrt[3]{31{,}255\ 875} = \frac{\sqrt[3]{31\ 255\ 875}}{\sqrt[3]{1\ 000\ 000}} = \frac{315}{100} \equiv 3{,}15$$

Ondalık kesirlerin, bayağı kesre çevrildikten sonra küp kökleri yukarıdaki örnekte olduğu gibi hesaplanabilir. Bu örnekten özet olarak şu sonuç çıkar :

I— Ondalık bir sayıda virgülden sonra gelen rakam sayısı 3 tane veya 3 ' ün katları kadarsa, virgül yokmuş gibi sayının küp kökü alınır. Ve bu sayıda (Sağdan itibaren küp kökü alınan sayıda) virgülden sonra gelen rakam sayısının üçte biri kadar virgül alınır.

II— Ondalık bir sayıda virgülden sonra gelen rakam sayısı 2 veya 1 ise, sayının önüne 1 veya 2 sıfır konur ve I. inci metod tatbik edilir.

94,818 816 sayısının küp kökünü alalım, 94 818 816 sayısının küp kökü 456 dır. İlk sayıda virgülden sonra gelen rakam sayısı 6 olduğundan 456 sayısında sağdan itibaren (6 : 3 = 2) ikinci basamaktan sonra virgül konur.

$$\sqrt[3]{\overline{94,\overline{818}\ \overline{816}}} = 4{,}56 \quad \text{olur.}$$

§ 5 — Bayağı Kesirlerin Küp kökü

Bir bayağı kesrin küp kökünü almak için pay ve paydanın ayrı ayrı küp kökleri alındıktan sonra birbirine bölünür.

Meselâ : $\frac{8}{27}$ kesrinin küp kökü $\frac{2}{3}$,

$\frac{1}{64}$ kesrinin küp kökü $\frac{1}{4}$ tür.

Özet olarak; $\frac{3}{8}$ kesrinin küp kökü $\frac{1{,}442}{2} \equiv 0{,}721$ dir.

Kesrin paydası tam küp olduğu takdirde (bindebire yakın) verilen kesrin küp kökü kolayca bu usulle alınabilir.

Kesrin paydası tam küp olmadığı takdirde şu iki usulden birisini uygulamalıdır.

I— Kesrin pay ve paydası, ya paydanın karesiyle veyahut paydayı tam küp kılabilecek her hangi bir sayı ile çarpılmalı, genel kaideyi uygulamalıdır.

II— Bayağı kesri ondalık kesir haline koyarak (0,1) , (0,01) ; (0,001) ; . . . . . ve böylece istenilen yaklaşık derecesi elde edilecek surette ondalık kesirlerin küp kök alma kaidesi uygulanmalıdır

Mesela : $\frac{3}{5}$ Kesrinin küp kökünü bulmak gerekse bunun pay ve paydasını 5 in karesi olan 25 ile çarparız. $\frac{3\times25}{5\times25} = \frac{75}{125}$ olur ki bunun küp kökü de; $\sqrt[3]{\frac{75}{125}} \equiv \frac{\sqrt[3]{75}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4{,}217}{5} = 0{,}843$ (Bindebire yakın hata ile).

Keza : $\frac{5}{9}$ Kesrinin küp kökü bulunmak istenilse bu

kesrin pay ve paydasını 3 ile çarparsak, $\frac{5\times3}{9\times3} = \frac{15}{27}$ olur.

Bunun paydası tam küp olduğu için, $\sqrt[3]{\frac{15}{27}} = \frac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{27}} \equiv \frac{2,466}{3} = 0,822$

(Bindebire yakın hata ile)

§ 6 — Küp kök İşleminin Sağlaması

Küp kök alma işleminin doğruluğunu 2 şekilde kontrol edebiliriz.

I— Küp kökün küpü alınır. Buna işlemin kalanı eklenir. Bu toplamın sonucu küp kökü alınan sayı olmalıdır. Meselâ 15 070 223 sayısının küp kökü 247 ve kalanı da 1 000 dir. Bu işlemin doğru olup olmadığını anlamak için 247 nin küpü alınır, buna 1 000 eklenirse 15 070 223 elde edilmelidir.

$247^3 + 1\ 000 = 15\ 069\ 223 + 1\ 000 = 15\ 070\ 223$

olduğundan küp kök alma işlemi doğrudur.

II— Küp kök alma işleminin 9 ile sağlaması :

Bir sayı A , bunun küp kökü b , kalan sayı x olsun.

$A = b^3 + x$ dir. Bu eşitliğe göre A nın 9 ile bölümünden kalan, b^3 ün kalanı ile x in kalanı toplamına eşittir. Buradan şu kaide çıkartılır.

Küp kök olan b nin 9 ile bölümünden kalan hesaplanır, bunun küpü alınır, bu küpün de 9 ile kalanı bulunur. Bu kalana x in 9 ile bölümünden kalan eklenir. Bu toplamın 9 ile bölümünden kalan, verilen A sayısının 9 ile bölümünden kalanına eşit olmalıdır.

$$A = b^3 + x$$
$$15\ 070\ 223 = 247^3 + 1\ 000$$
$$2 = 1 + 1$$

§ 7 — Küp kök Alma Üzerinde Alıştırma ve Problemler

1.) Aşağıdaki sayılar tam küp sayılardır. Bu sayıların tam küp olduklarını;

a) Asal çarpanlarına ayırmak suretiyle,

b) Küp köklerini almak suretiyle gösteriniz ve küp kök almanın sağlamasını yapınız.

2 744	(14)	241 804 367	(623)
15 625	(25)	1 083 206 683	(1027)
110 592	(48)	2 326 203 125	(1325)
8 489 664	(204)		

2.) Aşağıdaki sayıların küp kökleri tam değildir. Küp köklerini ve kalanlarını hesaplayınız.

90	168 575
135	1 160 625
416	1 926 648
1 425	3 216 685
68 520	

3.) İkinci sorudaki sayıların küp köklerini virgülden sonra 2 basamak ileriye kadar (Yüzdebir'e yakın hata ile) hesaplayınız.

4.) 1, 2, 3, 4, ... n rakamlı 1 sayının küpü kaç rakamlı bir sayıdır ?

5.) 1, 2, 3, 4, ... n ..... 3n rakamlı bir sayının küp kökü kaç rakamlı bir sayıdır ?

6.) Aşağıdaki sayıların küp köklerini virgülden sonra 3 basamak ileriye kadar (Bindebire yakın hata ile) hesaplayınız.

2	1 958
3	4 500
17	46 325
95	595 646
200	2 402 150

7.) Aşağıdaki ondalık kesirlerin küp köklerini hesaplayınız.

0,000 005 451 776	(0,176)	0,009 261	(0,21)
0,016 387 064	(0,254)	0,005 832	(0,18)
0,071 473 375	(0,415)	0,729	(0,9)
0,250 047	(0,63)	12,167	(2,3)
0,085 184	(0,44)	I40,608	(5,2)
0,039 304	(0,34)	4 251,528	(16,2)

8.) Aşağıdaki ondalık kesirlerin küp köklerini virgülden sonra 3 basamak ileriye kadar (Bindebire yakın hata ile) hesaplayınız.

0,0163 1 958,1958

9,25 28 957,00957

42,9

156,3500

9.) Aşağıdaki bayağı kesirlerin küp köklerini hesaplayınız.

a) $\frac{8}{27}$, $\frac{1}{125}$, $\frac{64}{1000}$

b) $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{27}$, $\frac{8}{125}$

c) $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{7}$ (Pay ve paydayı paydanın karesiyle çarpın.)

d) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{32}$, $\frac{7}{25}$ (Pay ve paydayı, paydası küp olacak şekilde uygun bir sayı ile çarpınız.)

10.) Küp biçiminde bir su deposu 8 869,743 dm^3 su aldığına göre deponun bir kenarı kaç metredir ? (20,7 dm)

11.) Boyutları a = 16 dm , b = 14 dm , c = 98 dm olan bir oda hacmine eşit olan küp biçimindeki bir odanın bir kenarı ne olmalıdır ? (28 dm)

12.) Yüksekliği tabanının yarı çapına eşit bir silindir hacmi 785 862 mm^3 olduğuna göre silindirin taban yarı çapını yaklaşık olarak hesaplayınız. (Pi sayısı $\frac{22}{7}$ alınacaktır. Taban yarıçapı 63 mm dir.)

13.) Yüksekliği taban yarıçapına eşit bir koninin hacmi 9 702 cm^3 olduğuna göre koninin taban yarıçapını yaklaşık olarak hesaplayınız. (Pi sayısı 22/7 alınacaktır, Taban yarıçapı 21 cm)

14.) Hacmi 38 808 cm^3 olan kürenin yarıçapını yaklaşık olarak hesaplayınız. (Pi 22/7 alınacaktır. Yarıçap 21 cm)

15.) 421 875 sayısının bir tam küp olduğu bilindiğine göre hesap yapmadan küp kökünü hesaplayınız, (75)

16.) Bir sayının küpü 541 343 375 dir. Bu sayının onlar rakamı (1) oldağuna göre bu sayıyı bulunuz. (815)

17.) 148,035 889 sayısının altıncı kuvvetten kökünü bulunuz. (2,3)

18.) 200 sayısını tam küp haline koymak için bununla çarpılacak en küçük sayı ne olmalıdır ?

19.) Karesiyle küpü toplamı 252 eden sayıyı bulunuz. (6)

20.) Küpüyle karesi arasındaki fark 448 olan sayıyı bulunuz. (8)

21.) Çarpımları 29760 olan 3 ardışık sayıyı hesaplayınız. (30,31,32)

22) Bir küp kök almada, kalanın küp kök olarak bulunan sayı ile bu sayının karesi toplamının 3 katını geçemiyeceğini ispat ediniz.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1	1,000	1,000	51	2601	132 651	7,141	3,708
2	4	8	1,414	1.260	52	2704	140 608	7,211	3,733
3	9	27	1,732	1,442	53	2809	148 877	7,280	3,756
4	16	64	2,000	1,587	54	2916	157 464	7,349	3,780
5	25	125	2,236	1,710	55	3025	166 375	7,416	3,803
6	36	216	2.450	1,817	56	3136	175 616	7,483	3.826
7	49	343	2,646	1,913	57	3249	185 193	7,550	3,849
8	64	512	2,828	2,000	58	3364	195 112	7,616	3,871
9	81	729	3,000	2,080	59	3481	205 379	7,681	3,893
10	100	1 000	3,162	2,154	60	3600	216 000	7,746	3,915
11	121	1 331	3,317	2,224	61	3721	226 981	7,810	3,937
12	144	1 728	3,464	2,289	62	3844	238 328	7,874	3,958
13	169	2 197	3.606	2,351	63	3969	250 047	7,937	3,979
14	196	2 744	3,742	2,410	64	4096	262 144	8,000	4,000
15	225	3 375	3,873	2,466	65	4225	274 625	8,062	4,021
16	256	4 096	4.000	2,520	66	4356	287 496	8.124	4,041
17	289	4 913	4,123	2,571	67	4489	300 763	8,185	4,062
18	324	5 832	4,243	2,621	68	4624	314 432	8.246	4,082
19	361	6 859	4,359	2,668	69	4761	328 509	8,307	4,102
20	400	8 000	4.472	2,714	70	4900	343 000	8,367	4,121
21	441	9 261	4,583	2,759	71	5041	357 911	8,426	4,141
22	484	10 648	4,690	2,802	72	5184	373 248	8,485	4,160
23	529	12 167	4,796	2,844	73	5329	389 017	8,544	4,179
24	576	13 824	4,899	2.885	74	5476	405 224	8,602	4,198
25	625	15 625	5,000	2,924	75	5625	421 875	8,660	4,217
26	676	17 576	5,099	2,963	76	5776	438 976	8,718	4,236
27	729	19 683	5,196	3,000	77	5929	456 533	8,775	4,254
28	784	21 952	5,292	3,037	78	6084	474 552	8,832	4,273
29	841	24 389	5,385	3,072	79	6241	493 039	8,888	4,291
30	900	27 000	5,477	3,107	80	6400	512 000	8,944	4,309
31	961	29 791	5,568	3,141	81	6561	531 441	9,000	4.327
32	1024	32 768	5,657	3,175	82	6724	551 368	9.055	4,345
33	1089	35 937	5,745	3,208	83	6889	571 787	9,110	4,362
34	1156	39 304	5,831	3,240	84	7056	592 704	9,165	4,380
35	1225	42 875	5.916	3,271	85	7225	614 125	9,220	4,397
36	1296	46 656	6,000	3,302	86	7396	636 056	9,274	4,414
37	1369	50 653	6,083	3,332	87	7569	658 503	9,327	4,431
38	1444	54 872	6,164	3,362	88	7744	681 472	9,381	4,448
39	1521	59 319	6,245	3,391	89	7921	704 969	9,434	4,465
40	1600	64 000	6,325	3.420	90	8100	729 000	9,487	4,481
41	1681	68 921	6,403	3,448	91	8281	753 571	9,539	4,498
42	1764	74 088	6,481	3,476	92	8464	778 688	9,592	4,514
43	1849	79 507	6,557	3,503	93	8649	804 357	9,644	4,531
44	1936	85 184	6.633	3,530	94	8836	830 584	9,695	4,547
45	2025	91 125	6,708	3,557	95	9025	857 375	9,747	4,563
46	2116	97 336	6,782	3,583	96	9216	884 736	9,798	4,579
47	2209	103 823	6,856	3,609	97	9409	912 673	9,849	4,595
48	2304	110 592	6,928	3,634	98	9604	941 192	9,900	4,610
49	2401	117 649	7,000	3,659	99	9801	970 299	9,950	4,626
50	2500	125 000	7,071	3,684	100	10,000	1 000 000	10,000	4,642
					π	9,8696	31,0063	1,773	1,465

İÇİNDEKİLER

BİRİNCİ BÖLÜM

REFİ

Sayfa

1. Üslü kemiyetin tarifi 5
2. Refi (Tarif) 5
3. Refetmek 6
4. Kare 6
5. Bir tam sayının tam kare olup olmadığının pratik yoldan araştırılması 7
6. Küp 7
7. Bir tam sayının tam küp olup olmadığının pratik yoldan araştırılması 8

İKİNCİ BÖLÜM

KÖK

1. Kökün manası ve kök alma işlemi 9
2. Kare kök (Tarif) 9
3. Tam kare sayıların kare kökünün pratik yoldan hesaplanması 10
4. Küp kök (Tarif) 10
5. Tam küp sayıların küp köklerinin pratik yoldan hesaplanması 10

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

KARE KÖK ALMA TEKNİĞİ

§ 1. Kare kök almanın tekniğiyle ilgili hazırlayıcı ilk bilgiler . 11
§ 2. Kare kök almanın nazariyatı 13
A.) Kare kök almanın dayandığı temel özdeşlikler . . 13
B.) Kare kök almanın temel özdeşliklere dayanarak nümerik misaller üzerinde izahı 13
§ 3. Kare kök almanın pratik olarak nümerik misaller üzerinde izahı 17
§ 4. Ondalık kesirlerin kare kökünün hesabı 26
§ 5. Bayağı kesirlerin kare kökü 29
§ 6. Kare kök işleminin sağlaması 30
§ 7. Kare kök alma üzerine alıştırma ve problemler . . . 30

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

KÜP KÖK ALMA TEKNİĞİ

	Sayfa
§ 1. Küp kök almanın tekniğiyle ilgili hazırlayıcı ilk bilgiler .	35
§ 2. Küp kök almanın nazariyatı	37
A.) Küp kök almanın dayandığı temel özdeşlikler . .	37
B.) Küp kök almanın temel özdeşliklere dayanarak nümerik misaller üzerinde izahı	37
§ 3. Küp kök almanın pratik olarak nümerik misaller üzerinde izahı	41
§ 4. Ondalık kesirlerin küp kökünün hesabı	49
§ 5. Bayağı kesirlerin küp kökü	53
§ 6. Küp kök işleminin sağlaması	54
§ 7. Küp kök alma üzerine alıştırma ve problemler . . .	54

TÜRKİYE
VAKIFLAR
BANKASI
T.A.O.

Memleketimizin en büyük sanayi teşekkülü
SÜMERBANK
Bankacılık hizmetlerile de emrinizdedir.
SÜMERBANK
Mevduat sahiplerine en fazla menfaat temin eden Bankadır.
İKRAMİYE ÇEKİLİŞLERİNDE
Ankara Yenişehirde, İstanbul Göztepede
Konforlu Apartman Daireleri
Zengin Para İkramiyeleri
Bunlara ilâveten : Mevduat sahiplerine en geniş imkânlar dahilinde
YÜNLÜ ve PAMUKLU SATIŞLARINDA o/o 10 TENZİLÂT

PARA
İKRAMİYELERİ